SISTEMAS DE ECUACIONES:

Están formados siempre por dos ecuaciones con dos incógnitas cada una, una "x" y una "y", aunque puede aparecer cualquier otra letra (no es lo normal). Ambas incógnitas están elevadas a exponente "1".

Las dos ecuaciones, generalmente, están unidas por una llave para saber que no son dos ecuaciones independientes.

La forma normal que aparece cada ecuación es: en el miembro de la izquierda, primero veremos el término de las "x", luego el de las "y", a continuación el igual, y por último, el término independiente (nº solitario). Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 22 \end{array}\right\} \qquad \text{EXPRESIÓN GENERAL} \longrightarrow \qquad \left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{array}\right\}$$

¿Qué es "a"? Pues como se aprecia en la expresión general de los sistemas de ecuaciones, sería el nº que va a acompañar, multiplicando, a la incógnita "x" en la primera ecuación. En el ejemplo, es "1".

¿Qué será entonces "c´"? Tal y como observamos, será el término independiente de la segunda ecuación, el cual debe de estar en el miembro de la derecha si queremos que esté bien colocado. En el ejemplo, corresponde al nº "22".

La solución de los sistemas de ecuaciones, como por ejemplo el de ahí arriba, deberá tener un valor para la incógnita "x" y otro valor para la incógnita "y" que haga que cuando sustituyamos dichos valores en cada una de las ecuaciones la igualdad que se forme sea cierta. Como es de suponer, el valor que tome la "x" en la primera ecuación (la de arriba) deberá ser el mismo del que tome en la segunda (la de abajo), y lo mismo para la incógnita "y". Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 22 \end{array}\right\} \quad \text{Las "x" valen "5" y las "y" valen "– 4"} \quad (x = 5,\ y = -4)$$

En la "ecuación 1", x + y = 1 → 5 + (– 4) = 1, y en la "ecuación 2", 2x – 3y = 22 → 2· 5 – 3 · (– 4) = 22

Por mucho que busquéis, si sabemos que los valores de la "x" y de la "y" son esos (que son los que hacen cumplir la igualdad en las dos ecuaciones), ya no habrá otro par de nºs que hagan cumplir también dichas igualdades, es decir, que, por lo general, los sistemas de ecuaciones tienen una única solución (un valor para "x" y otro para "y").

NOTA: Si cogemos una ecuación que tenga dos incógnitas diferentes, las soluciones serían infinitas, como por ejemplo:

Si la ecuación es "x + y = 3", una solución podría ser "x = 1, y = 2"

Una segunda solución sería "x = 3, y = 0". Una tercera podría ser "x = 8, y = – 5".

Y así podríamos poner los ejemplos que quisiésemos, de forma infinita. Sin embargo, los sistemas de ecuaciones, formados por 2 ecuaciones, por lo general, tienen una única solución.

EJERCICIOS

1.- De la página 160 del libro, los nºs 2 y 4.

2.- Comprueba si las soluciones que os doy en cada sistema de ecuaciones son correctas o no. Realiza para ello los cálculos necesarios.

a) x = 1 , y = 1 b) x = – 5 , y = 3 c) x = 6 , y = – 10 d) x = – 7 , y = – 1

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y = 4 \\ -x + 7y = 6 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} -2x - y = 7 \\ x - 2y = -11 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x + 6y = -54 \\ 2x - y = 22 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} -x - y = 8 \\ -5x + 2y = 33 \end{array}\right\}$$

3.- Invéntate un sistema de ecuaciones cuya solución sea x = –2, y = –5. Invéntate otro sistema, pero ahora "x = 1" y la "y" es igual a "– 1".

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA ECUACIÓN DEL SISTEMA:

Si cogemos una ecuación cualquiera de un sistema de ecuaciones y despejamos la incógnita "y", ¿qué observamos? Mirad:

$$3x + y = -1 \rightarrow y = -3x - 1$$

¿En qué se ha convertido? ¿A qué nos suena? Pues sí, se aprecia una función de primer grado, concretamente una función afín (tiene b = – 1), como las vistas en el tema 13. Recordad que es lo mismo

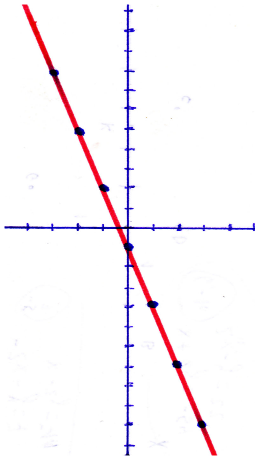
$$y = -3x - 1 \rightarrow f(x) = -3x - 1$$

Ya sabemos que podemos hacer una tabla de valores cambiando a la "x" por los n^{os} que nos dé la gana (aunque es mejor desde el – 3 al + 3, por lo que todos conocemos) y así averiguamos "y". Estos pares de n^{os} (puntos) los podremos representar en unos ejes de coordenadas, y nos saldrá una línea recta que pasará por todos y cada uno de los puntos averiguados.

Aquí va un ejemplo (corresponde a la ecuación superior):

x	y
– 3	8
– 2	5
– 1	2
0	– 1
1	– 4
2	– 7
3	– 10

$$y = -3x - 1$$
$$y = -3 \cdot (-3) - 1 = 9 - 1 = 8$$
$$y = -3 \cdot (-2) - 1 = 6 - 1 = 5$$
$$y = -3 \cdot (-1) - 1 = 3 - 1 = 2$$
$$y = -3 \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1$$
$$y = -3 \cdot 1 - 1 = -3 - 1 = -4$$
$$y = -3 \cdot 2 - 1 = -6 - 1 = -7$$
$$y = -3 \cdot 3 - 1 = -9 - 1 = -10$$



EJERCICIO

1.- De la página 161 del libro, el nº 6ac.

NÚMERO DE SOLUCIONES DE LOS SITEMAS DE ECUACIONES. TIPOS DE SISTEMAS:

Hemos comentado con anterioridad que los sistemas de ecuaciones tienen, generalmente, una única solución, es decir, un único valor para "x" y otro único para "y", el mismo para las dos ecuaciones. Eso es lo normal.

En ocasiones no ocurre lo que acabamos de decir, y esto nos lleva a hablar de los tipos de sistemas y de su nº de soluciones. Aquí vienen:

a) Sist. COMPATIBLE Y DETERMINADO → Es el que hemos visto hasta este momento, es decir, el que tiene una única solución para "x" y otra única para "y", y no hay más. Para saber que un sistema es de este tipo lo único que tenemos que hacer es formar una razón entre las "aes", por un lado, y las "bes", por otro, de las 2 ecuaciones del sistema. Si los resultados son diferentes, estamos delante de este tipo de sistemas.

$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 22 \end{array}\right\}$ $\frac{a}{a'} = \frac{1}{2}$ „ $\frac{b}{b'} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{3}$

Si representamos este tipo de sistemas en unos ejes de coordenadas nos saldrán dos **rectas**, una por cada ecuación, **secantes**.

b) Sist. COMPATIBLE E INDETERMINADO → Como bien indica la palabra, son sistemas de ecuaciones "no determinados" en cuanto a la solución, pues pueden tener varias, así como infinitas. Se sabe que son de este tipo los sistemas que haciendo una razón con las "aes" sale lo mismo que la de las "bes", y también lo mismo que las de las "ces".

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} 2x-4y=6 \\ x-2y=3 \end{array}\right\}$ $\quad \frac{a}{a'}=\frac{2}{1}=2$,, $\frac{b}{b'}=\frac{-4}{-2}=2$,, $\frac{c}{c'}=\frac{6}{3}=2$

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \longrightarrow 2 = 2 = 2$$

Si representamos este tipo de sistemas en unos ejes de coordenadas nos saldrán dos **rectas coincidentes**, de ahí que tengan infinitas soluciones (cada punto de las rectas sería una solución, y ya sabemos que una recta son infinitos puntos alineados).

c) Sist. INCOMPATIBLE → Como indica la palabra, son sistemas "no compatibles", queriendo decir con ello que no tienen solución. La explicación es bien sencilla. Cuando las representamos en unos ejes de coordenadas salen dos **rectas paralelas**, y que, por no tener ningún punto de corte, no tienen ninguna solución. Para saber si tenemos ante nuestros ojos un sistema de este tipo, sin necesidad de representarlo, bastará con dividir los coeficientes que aparecen en el sistema de ecuaciones. Será un sistema incompatible cuando la razón entre las "aes" y las de las "bes" salgan los mismo, pero diferente de la razón entre las "ces".

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x-3y=1 \\ 2x-6y=5 \end{array}\right\}$ $\quad \frac{a}{a'}=\frac{1}{2}$,, $\frac{b}{b'}=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}$,, $\frac{c}{c'}=\frac{1}{5}$

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'} \longrightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{5}$$

EJERCICIOS

1.- Realizando la razón entre los coeficientes, averigua qué tipo de sistema es cada uno de los que vienen a continuación:

a) $\left.\begin{array}{r} -2x-y=7 \\ x-2y=-11 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} -2x+2y=7 \\ 3x-3y=-1 \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r} -8x-6y=4 \\ -4x-2y=-2 \end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r} -5x-9y=3 \\ 5x-9y=-1 \end{array}\right\}$ e) $\left.\begin{array}{r} -2x+3y=7 \\ 6x-9y=-21 \end{array}\right\}$

2.- Invéntate un sistema de ecuaciones de cada tipo que no haya salido con anterioridad.

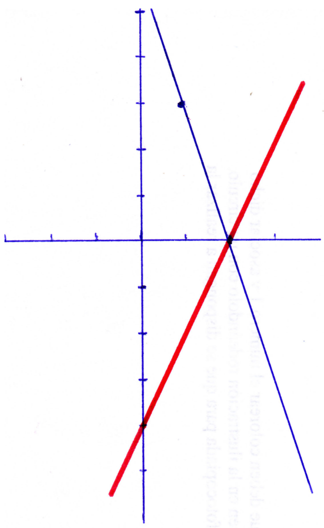
MÉTODOS PARA SOLUCIONAR LOS SITEMAS DE ECUACIONES:

Existen, principalmente, 4 métodos. Uno es gráfico (se averigua con una gráfica que pintamos sobre unos ejes de coordenadas), y los otros tres son algebraicos (se realizan una serie de cálculos matemáticos para llegar a la solución). Empecemos con el primero.

Nº 1 .- **Representación gráfica** → Como ya sabemos, las ecuaciones se pueden representar sobre unos ejes de coordenadas. Basta con despejar la "y" de cada una y hacer la tabla de valores correspondiente. Cuando tengamos las dos rectas dibujadas, éstas se cortarán en un punto. Mirando las coordenadas de ese punto nos indicará la solución del sistema.

Mira el ejemplo de la derecha.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y=6 \\ 2x-y=4 \end{array}\right\}$$



Se ve que el punto de corte de las dos rectas (la azul y la roja) es la solución. Si miramos dónde está ese punto colocado nos dice que "x = 2" y que "y = 0".

EJERCICIOS

1.- De la página 162 del libro, el nº 2b.

2.- Representa gráficamente los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=-6 \\ -x+2y&=-3 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x-y&=-5 \\ x+2y&=-10 \end{aligned}\right\}$$

Nº 2 .- **<u>Sustitución</u>** → Es el primero de los métodos algebraicos. Como bien indica la palabra que nombra al método, habrá que sustituir algo. Lo que se hace es despejar cualquier incógnita de cualquiera de las 2 ecuaciones del sistema (la “x” de la 1ª ecuación, por ejemplo) y a la expresión algebraica que sea igual se cambia por la incógnita de la otra ecuación. Luego, solo tenemos que resolver la ecuación resultante y ya tenemos el valor de la 1ª incógnita. Para la 2ª incógnita, basta con cambiar el valor obtenido de la 1ª incógnita en la ecuación despejada y con ello la averiguamos.

Veamos un ejemplo sencillo:

$$\left.\begin{aligned} x+y&=1 \\ 2x-3y&=22 \end{aligned}\right\} \longrightarrow x=-y+1$$

2ª ecuación $\quad 2x-3y=22$

$$2\cdot(-y+1)-3y=22$$
$$-2y+2-3y=22$$
$$-2y-3y=22-2$$
$$-5y=20$$
$$y=\frac{20}{-5}=-4 \longrightarrow \boxed{y=-4}$$

$$x=-(-4)+1$$
$$x=4+1=5$$
$$\boxed{x=5}$$

EJERCICIOS

3.- De la página 163 del libro, los nºs 1d y 2cd.

4.- Resuelve el siguiente sistema por el método de sustitución:

$$\left.\begin{aligned} -2x-y&=7 \\ x-2y&=-11 \end{aligned}\right\}$$

Nº 3 .- **<u>Igualación</u>** → Según nos comunica dicha palabra, con este método hay que igualar algo. Lo que se hace es despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones del sistema (la “y”, por ejemplo). Como “y” es igual a “y” (y = y) quiere decir que las dos expresiones algebraicas que nos han salido al despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones serán iguales. A partir de ahí, resolvemos la ecuación de una incógnita que obtenemos ál igualarlo, y así tendremos el valor de la primera incógnita. Para averiguar la 2ª incógnita, bastará con cambiar el valor obtenido de la 1ª en cualquiera de las ecuaciones despejadas.

Veamos un ejemplo práctico:

$$\left.\begin{aligned} 5x+9y&=-53 \\ -3x+2y&=-20 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &\longrightarrow 9y=-5x-53 \longrightarrow y=\frac{-5x-53}{9} \\ &\longrightarrow 2y=3x-20 \longrightarrow y=\frac{3x-20}{2} \end{aligned} \longrightarrow \boxed{y=y}$$

$$\frac{-5x-53}{9}=\frac{3x-20}{2}$$
$$2\cdot(-5x-53)=9\cdot(3x-20)$$
$$-10x-106=27x-180$$
$$-10x-27x=-180+106$$
$$-37x=-74$$
$$x=\frac{-74}{-37}=2$$
$$\boxed{x=2}$$

$$y=\frac{3\cdot 2-20}{2}$$
$$y=\frac{6-20}{2}$$
$$y=\frac{-14}{2}$$
$$\boxed{y=-7}$$

1.- De la página 164 del libro, los nº^s 3d y 4bd.

2.- Resuelve por igualación, sustitución y gráficamente el sistema …

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &= 7 \\ 2x - 3y &= -7 \end{aligned}\right\}$$

3.- Invéntate un sistema de ecuaciones cuya solución sea "– 2" para las dos incógnitas. Luego sacaremos a algún compañero/a tuyo/a para que compruebe que es cierto.

Nº 3 .- **<u>Reducción</u>** → La palabra "reducción" hace referencia a la desaparición de alguna de las incógnitas. Para que desaparezca alguna de esos 2 incógnitas la operación que debemos hacer con las ecuaciones es "sumarlas". Si nos encontramos 2 términos de signo contrario, al sumarlos se irán (serán "0"). ¿Cómo se hace? Pues se miran las dos ecuaciones del sistema. Si ocurre lo que he dicho anteriormente, se suman las dos ecuaciones, y la ecuación de una incógnita resultante se soluciona para encontrar el 1^er valor de la primera de las incógnitas.

En caso de que los términos no sean iguales pero de distinto signo (que será lo más normal) tendremos que multiplicar a una (o a las dos) ecuación (o ecuaciones) por un nº que haga que alguno de los términos en una ecuación sea igual pero de signo contrario al de la otra. Luego, no tendríamos más que sumar las ecuaciones ...

Veamos algunos ejemplos relacionados:

a)

$$+\left.\begin{aligned} 3x + y &= 6 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad 3 \cdot 2 + y = 6$$

$$6 + y = 6$$

$$5x \;/\; = 10 \qquad y = 6 - 6$$

$$x = \frac{10}{5} = 2 \qquad \boxed{y = 0}$$

$$\boxed{x = 2}$$

b)

$$\left.\begin{aligned} 4x + y &= 1 \\ 2x + y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

$4x + y = 1$ → La colocamos arriba → $4x + y = 1$

$2x + y = -1$ → La multiplicamos por (– 2) → $-4x - 2y = 2$ (+)

$$/ \quad -y = 3$$

$$\boxed{y = -3}$$

$$2x + (-3) = -1$$

$$2x - 3 = -1$$

$$2x = -1 + 3$$

$$x = \frac{2}{2} = 1 \longrightarrow \boxed{x = 1}$$

c)

$2x + 5y = -10$ → La multiplicamos por (– 3) → $-6x - 15y = 30$ (+)

$3x + 3y = 3$ → La multiplicamos por (5) → $15x + 15y = 15$

$$9x \;/\; = 45$$

$$\boxed{x = 5} \longleftarrow x = \frac{45}{9} = 5$$

$$3 \cdot 5 + 3y = 3$$

$$15 + 3y = 3$$

$$3y = 3 - 15$$

$$y = \frac{-12}{3} = -4 \longrightarrow \boxed{y = -4}$$

1.- De la página 165 del libro, los nos 6a y 7abc.

2.- Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción:

a) $\left.\begin{array}{r}-2x - y = 7\\ x - 2y = -11\end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r}x - 4y = 23\\ -3x + 2y = -9\end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{r}2x + 3y = -12\\ 4x - 2y = -8\end{array}\right\}$ d) $\left.\begin{array}{r}4x - y = 4\\ -2x + 5y = -11\end{array}\right\}$

APLICACIÓN DE LOS SISTEMAS A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:

Al igual que con el tema 3, relacionado con las ecuaciones de primer grado, los sistemas de ecuaciones, entre otros menesteres, sirven para resolver problemas.

El mecanismo de solución viene a ser el mismo que para las ecuaciones de 1er grado, es decir, "leerse muy bien el problema hasta comprenderlo, colocar los datos referidos en la parte izquierda, colocar las 2 incógnitas a 2 de los datos, realizar unos razonamientos que me planteen las 2 ecuaciones, y, por último, solucionar el sistema con el método que prefiramos (a no ser que me digan que lo resuelva con algún método concreto)". ¡Ah! Y no te olvides de poner "la solución bien clarita y enmarcada".

Pongamos un ejemplo con un problema que supongo os sonará:

PROBLEMA → "Ana y Mónica fueron de visita a la granja de su abuela. Durante su estancia vieron en un corral conejos y gallinas. Ana dijo haber contado 61 animales y Mónica 196 patas. ¿Cuántos animales había de cada clase?"

Nº de conejos : x
Nº de gallinas : y
Nº de animales : 61
Nº de patas : 196

Razonamiento para la 1ª ecuación: "Al sumar el nº de conejos y de gallinas debe salir 61"
Razonamiento para la 2ª ecuación: "Al sumar el nº de patas de los animales debe salir 196"

El sistema de ecuaciones que se nos queda sería

$$\left.\begin{array}{r}x + y = 61\\ 4x + 2y = 196\end{array}\right\}$$

Solucionado con cualquiera de los 4 métodos, sale la solución $\boxed{x = 37 \quad y = 24}$

Eso quiere decir que había $\boxed{\text{37 conejos y 24 gallinas}}$

EJERCICIOS

3.- De la página 166 del libro, el nº 2. De la página siguiente, los nos 3 y 5. Por último, de la página 169, los nos 8 y 9.

4.- Resuelve los problemas 2, 5, 9, 13, 33, 40, 46, 61, 62, 63, 69 y 75 del tema 6, pero ahora mediante la utilización de un sistema de ecuaciones.

5.- Varios amigos están jugando a los chinos con monedas antiguas de 5 y 25 pesetas. Al abrir las manos cuentan 8 monedas con un valor de 140 pesetas. ¿Cuántas monedas hay de cada clase?

6.- Dos nos suman 51. Si al primero lo dividimos entre 3 y al segundo entre 6 los cocientes se diferencian en 1. Halla el valor de dichos nos.

7.- José le dice a Inés: "Si te doy 10 discos tendrías la misma cantidad que yo". Inés le responde: "Tienes razón. Solo te falta 10 discos para doblarme en nº". ¿Cuántos discos tiene cada uno?

8.- Josefa tiene 7 años menos que su prima Begoña y dentro de 15 años la suma de las edades será de 53 años. ¿Qué edad tiene cada una?

9.- La suma de los perímetros de 2 cuadrados es de 68 cm. ¿Cuál es el lado de cada cuadrado si el lado de uno de ellos es 3 cm mayor que el otro?

EJERCICIOS DEL TRABAJO: **(Seguro 17)** **7-T8--2ºESO**

1.- Realiza estas operaciones variadas y de repaso:

a) $(-3\mathbf{g}^5 + \frac{\mathbf{g}^3}{4})^2$

b) Pasa a notación científica $-0'00083 \cdot 10^{34}$

c) Fracción generatriz a $-0'058\widehat{17}$

d) $(-\frac{9}{2})^7 : (-\frac{729}{8})^{-8}$

e) $\frac{x+3}{5} + \frac{3x+1}{2} = 1 - \frac{x+9}{10}$

f) $\frac{2}{5} + \frac{1}{-4} - \frac{-3}{4} \cdot (\frac{3}{2} - 1) + (-\frac{1}{4})^2 : \frac{-1}{7}$

2.- PÁGINA 170 del LIBRO → número 1b.

3.- PÁGINA 170 del LIBRO → número 2.

4.- PÁGINA 170 del LIBRO → número 3bd.

5.- PÁGINA 170 del LIBRO → número 4cd.

6.- PÁGINA 170 del LIBRO → número 5bd.

7.- PÁGINA 170 del LIBRO → número 6. Cambiamos el enunciado por este: “solucionar cada apartado por un método diferente, siguiendo el orden de aparición de los apuntes”.

8.- PÁGINA 170 del LIBRO → número 8bc.

9.- PÁGINA 171 del LIBRO → número 10.

10.- PÁGINA 171 del LIBRO → número 11.

11.- PÁGINA 171 del LIBRO → número 14.

12.- PÁGINA 171 del LIBRO → número 15.

13.- PÁGINA 171 del LIBRO → número 18.

14.- PÁGINA 171 del LIBRO → número 21.

15.- PÁGINA 171 del LIBRO → número 22.

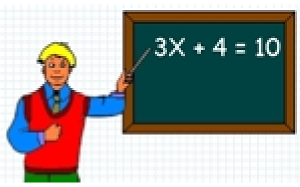
16.- PÁGINA 171 del LIBRO → número 24.

17.- Una empresa de alquiler de coches ofrece 2 modelos, uno de 4 plazas y otro de 5. Durante un día, la empresa alquila 10 coches en los que viajan 42 personas, quedando 2 plazas sin ocupar. ¿Cuántos coches alquilaron de cada tipo?

18.- PÁGINA 172 del LIBRO → número 27.

19.- PÁGINA 172 del LIBRO → número 31.

20.- Juan ha comprado una camisa y un pantalón. Los precios de estas prendas sumaban 60 €, pero le han hecho un 10 % de descuento en la camisa y un 20 % en el pantalón, y paga por ambos 50´15 €. ¿Cuál era el precio sin rebajar de cada prenda?



Fdo. Juan Chanfreut Rodríguez
Profesor de matemáticas de 2º de ESO