COORDENADAS CARTESIANAS:

Cuando nos encontremos en un plano dos ejes (rectas) perpendiculares, éste quedará dividido en 4 partes iguales. A cada una de esas partes se le llama "Cuadrante". El que está en la parte superior derecha es el 1er cuadrante, y el 2º el que está a su izquierda. El 3er cuadrante es el que está en la parte inferior izquierda y el que nos queda será el 4º. Los dos ejes tienen sus propios nombres. El eje "horizontal" se llama "eje de Abscisas" o "eje X". El eje "vertical" es llamado también "eje de ordenadas" o "eje Y". Los 2 ejes se cortan en un punto llamado "Origen de Coordenadas" y tiene un valor para el eje X (0) y el mismo valor para el eje Y (0), por lo que este punto está colocado en el (0,0). Este punto es el comienzo de los demás, ya que a partir de él se contabilizarán el resto.

Para pintar una serie de puntos en estos ejes (todos ellos, al ser puntos, serán nombrados con letra mayúscula), debemos saber que todo *lo que esté a la derecha del origen de coordenadas* será "*positivo*" y *lo que esté a la izquierda* será *negativo*. Por el contrario, *lo que esté arriba de él* será *positivo* y *lo que esté debajo* será *negativo*. Así, un punto que esté situado en el primer cuadrante tendrá los valores correspondientes a los dos ejes "positivos" ya que está a la derecha y arriba del "origen de coordenadas". Si nos encontráramos algún punto sobre uno de los ejes, el valor correspondiente a ese eje sería, obviamente, cero (0). Finalmente, en un mismo punto *siempre se pondrá a la izquierda el valor correspondiente al eje de abscisas y a la derecha, separado por una coma, el valor del eje de ordenadas*.

EJERCICIOS

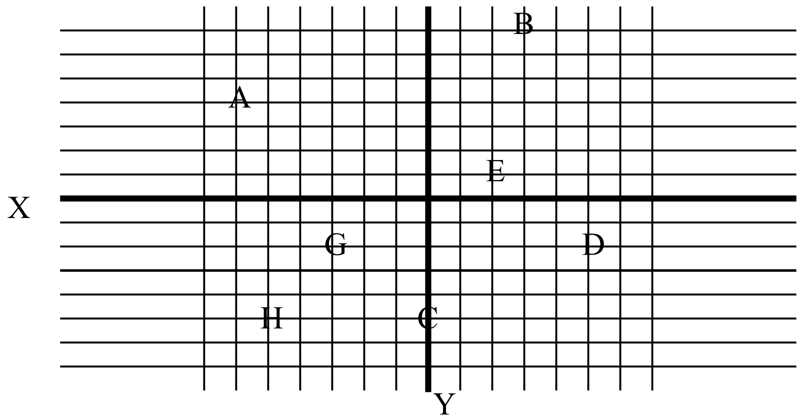
1.- Completa la tabla con los signos que faltan.

	Primer cuadrante	Segundo cuadrante	Tercer cuadrante	Cuarto cuadrante
Abscisa			–	
Ordenada	+			

2.- Representa en unos ejes de coordenadas estos puntos e indica en qué cuadrante se encuentran.

A (5,2) , B (- 3, 4) , C (- 1,- 3) , D (2,3) , E (-4,1) , F (2, -2) , G (0, -3) , H (5, -1) , I (-4, -2/5) , J (4, -8/3)

3.- Indica las coordenadas de los puntos representados en la siguiente figura:



MAGNITUDES. MAGNITUDES DEPENDIENTES:

Como ya sabemos, una magnitud es "todo aquello que se pueda medir y contar" como, por ejemplo, la temperatura, el dinero que cuesta algún objeto, la fuerza, el peso, coches de color blanco, ...

Las magnitudes pueden cambiar de valor, es decir, no siempre miden la misma cantidad (no siempre la temperatura de alguna zona es de 24º). Por esa razón, a las magnitudes también se las suele llamar "VARIABLES" Magnitud = Variable

También sabemos que si tenemos dos magnitudes (variables) relacionadas o dependientes será porque al cambiar el valor de una de ellas eso hace cambiar el valor de la otra. Un claro ejemplo es:

"litros de gasoil que echo en el coche con respecto al precio que pago por ellos"

Evidentemente, a un coche le puedo echar los litros de gasoil que yo quiera (hasta que no quepa más en el depósito, claro está). Pero, lo que voy a tener que pagar en la caja de la gasolinera dependerá de la cantidad de litros de gasoil que haya echado. Por eso decimos que la primera magnitud (litros de gasoil) es una "Variable Independiente", y la segunda (dinero a pagar) será la "Variable Dependiente".

VARIABLE INDEPENDIENTE Y VARIABLE DEPENDIENTE:

Por todo lo que hemos dicho arriba, una "Variable Independiente" (= Magnitud Independiente) será aquella que puede tomar cualquier valor sin depender de ninguna otra. Por el contrario, una "Variable Dependiente" (= Magnitud Dependiente) será aquella que tomará sus valores en función de los que toma otra variable, de la cual está relacionada.

A la "variable independiente" se la suele abreviar en "V.I." y suele ser representada con la letra "X". Por el contrario, a la "variable dependiente" se la abrevia en "V.D." y suele representarse con la letra "Y".

EJERCICIO

1.- El precio de un billete para coger un funicular que lleva a la cima de una montaña cuesta 3´50 €. ¿Crees que hay dos variables relacionadas? Si la respuesta es afirmativa, indica cuál es cada una y del tipo que es.

LAS FUNCIONES:

Son ejemplos claros que nos enseñan cómo dos magnitudes dependientes están relacionadas. En definitiva, las funciones son relaciones de dependencia entre dos magnitudes (también llamadas variables, la V.I. y la V.D.) de manera que a cada uno de los valores de la V.I. le corresponde un único valor de la V.D.

En el ejemplo de más arriba, puedo poner varios valores de cada una de las magnitudes que están relacionadas por medio de lo que se llama una "**Tabla de valores**". Veámosla:

V.I. (X) Litros de gasoil	V.D. (Y) Importe en €
1	1,15 € (1 x 1,15 €)
2	2,30 € (2 x 1,15 €)
3	3,45 € (3 x 1,15 €)
4	4,60 € (4 x 1,15 €)
10	11,50 € (10 x 1,15 €)
17	19,55 € (17 x 1,15 €)
23	26,45 € (23 x 1,15 €)

Cada valor (nº) de la columna de la izquierda pertenece a la V.I. y serán los litros de gasoil que puedo, quiero y/o me da la gana de echar en el coche (nada ni nadie me obliga a echar la cantidad que sea). A cada nº de esa columna se le da el nombre de "**Original**" o "**Antiimagen**". Los n^{os} de la otra columna salen en función de los que yo pongo en la columna de la izquierda (dependen de los que pongo en esa columna) y cada uno de ellos recibe el nombre de "**Imagen**".

Los valores de las dos columnas suelen también aparecer así: (1, 1´15) ,, (2, 2´30) ,, ... Como vemos, el primer nº corresponde a la V.I. (X) y el segundo a la V.D. (Y). También suelen aparecer así:

f(1) = 1´15 ,, f(2) = 2´30 ,, f(10) = 11´50 ,, ... y se leería "f de 1 igual a 1´15", y querrá decir que la imagen de 1 es 1´15 o que el original de 1´15 es 1.

IMPORTANTE: Las funciones que vamos a ver más detenidamente este año serán de **primer grado** ya que siempre las "X" (V.I.) estarán elevadas a exponente 1.

Aparte de hacer una "tabla de valores" con una función, donde colocamos "pares de n^{os} relacionados", también se pueden coger esos puntos y "**representarlos gráficamente**" en unos ejes de coordenadas. Colocaríamos en primer nº en el eje horizontal (eje X) y el 2º nº en el vertical (eje Y).

En algunas ocasiones, los puntos se podrán unir y otras veces no, según si tiene sentido unirlos o no. En el ejemplo de la tabla anterior, podría tener sentido unir los puntos porque se pueden echar al coche 3´45 litros o los que sean. Pero si lo que queremos es comprar entradas de cine (5´40 € cada una) no tendría sentido unir los puntos ya que estaríamos hablando de que se podrían comprar 3´45 entradas (podríamos hacer el intento de comprarlas y ver qué es lo que nos dice la taquillera.

Casi con toda probabilidad, si insistimos mucho, llame al de seguridad).

Por último, todas las funciones tienen una "**Fórmula**" matemática, que no es más que la expresión matemática de la función que nos informa de las operaciones que tenemos que hacer con la V.I. (X) para obtener la V.D. (Y). En el ejemplo de la tabla la fórmula sería $y = 1'15 \cdot x$

Todas las funciones empiezan por la letra "y" o bien por una letra minúscula seguida de la "x" encerrada en unos paréntesis: $y = 1'15 \cdot x$ o bien $f(x) = 1'15 \cdot x$ ya que "y" es lo mismo que "f(x)".

En resumen, **las FUNCIONES son relaciones de dependencia entre 2 variables, de manera que a cada valor de una de las variables (V.I.) le corresponde un único valor de la otra variable (V.D.)**. Con todas las funciones podemos hacer una **tabla de valores**, una **representación gráfica** con dichos valores y se pueden expresar algebraicamente mediante una **fórmula**.

EJERCICIOS

1.- De la pág. 258 del libro, los nºs 1 y 3.

2.- En el ejemplo del ejercicio 1 de la hoja 2 de los apuntes, han una tabla de datos, represéntalo en unos ejes de coordenadas e indica la fórmula de esa función. ¿Se pueden unor los puntos de esa gráfica? ¿Pq?

3.- Indica cuál es la variable independiente del par de variables relacionadas en cada uno de estos apartados:

"El importe de la factura de la luz y el nº de kilovatios gastados „ la apotema de un polígono regular y el valor de su área „ un nº entero y el valor de su cuadrado „ el coste de una llamada telefónica y el tiempo de duración „ el espacio recorrido y el tiempo invertido en recorrerlo".

4.- Di cuáles de las siguientes dependencias corresponden a una función y cuáles no:

a)

X →	1	2	3	4	5	6
Y →	3	6	9	12	15	18

b)

X →	1	1	2	2	3	3
Y →	5	6	7	8	9	10

c)

X →	–3	–2	–1	0	1	2	3
Y →	9	4	1	0	1	4	9

d)

X →	–3	–2	–1	0	1	2	3
Y →	5	5	5	5	5	5	5

<u>CÁLCULO DE IMÁGENES Y DE ORIGINALES:</u>

Cuando nos den la expresión algebraica de una función (la fórmula) podremos averiguar la imagen o el original (antiimagen) de unos valores del siguiente modo.

"En la función $f(x) = 2x - 15$, <u>¿cuál es la imagen de 4</u>?"

Si nos dicen que calculemos la imagen de un valor (de 4 en este caso) es porque ese 4 será el valor correspondiente al original (la X) por lo que lo único que tendríamos que hacer en la fórmula de esa función es cambiar a la "X" por dicho valor, hacer las operaciones correspondientes, y hallar el resultado, el cual será el valor que nos solicitan. Veámoslo

$f(4) = 2x - 15 = 2 \cdot 4 - 15 = 8 - 15 = -7$ Sol: la imagen de 4 es -7 → $(4, -7)$

"En la función $g(x) = -3x^2 + 7$, <u>¿cuál es el original de – 5</u>?

Si nos dicen que calculemos el original de un valor (de – 5 en este caso) es porque ese – 5 es la imagen (la Y), es decir, el resultado. Significará que tendremos que averiguar la "X", es decir, un nº que al elevarlo al cuadrado, multiplicado después por – 3 y luego sumándole 7, todo ello nos dé "– 5". Veamos cómo se averiguaría

$g(x) = -3x^2 + 7 \rightarrow -3x^2 + 7 = -5 \rightarrow -3x^2 = -5 - 7 \rightarrow x^2 = -12 : (-3) \rightarrow x = \sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$

Sol: el original de – 5 es + 2 o – 2 → $(2, -5)$ y $(-2, -5)$

EJERCICIOS

5.- De la página 261 del libro, los nºs 1 y 3.

6.- Dada las funciones $f(x) = 2(x - 1)$ y $g(x) = x^2 - 5$, calcula las imágenes de "– 2 y 4" y los originales de "4 y 5/4".

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN:

Cuando tenemos una función, al darle valores a la "X" y hacer los cálculos correspondientes nos saldrán los valores correspondientes a la "Y". Estos valores hemos dicho que se colocarían ordenadamente en una "tabla de valores", para luego representarlos en unos ejes de coordenadas.

Dependiendo de la función que sea, los puntos se podrán unir, obteniendo una **gráfica continua**. Si una vez que dibujamos los puntos, éstos no se pueden unir, tendríamos una **gráfica discontinua**. Un tipo de gráficas de este tipo son las **gráficas escalonadas**, donde no hay una única línea que pasa por todos los puntos sino varias líneas que parecen los peldaños de una escalera, de ahí su nombre.

Por otro lado, una vez tengamos dibujada la gráfica en unos ejes nos podremos dar cuenta de que la línea es "**ascendente o creciente**" cuando al aumentar el valor de la V.I. (X) aumenta también el valor de la V.D. (Y). Será "**descendente o decreciente**" al contrario, esto es, cuando al aumentar la V.I. disminuye la V.D., y será "**constante**" cuando al aumentar la V.I. la V.D. se mantiene igual. También podremos decir que un punto es "**máximo**" porque es el que tiene el mayor valor de la V.D., y será "**mínimo**" el punto con el menor valor de la V.D.

Además, generalmente **las gráficas suelen cortar a los ejes de abscisas y ordenadas**. Cortará al eje de **abscisas (X) cuando el valor de la "Y" sea "0"**, y cortará al eje de **ordenadas (Y) cuando el valor de la "X" sea "0"**. Para averiguar esos puntos de corte de la gráfica de la función bastaría hacer unos cálculos sencillos que vienen en la página 269 del libro.

EJERCICIOS

1.- De la página 259 del libro, el nº 1. También, de la página 268, los n^{os} 2 y 4.

2.- Un coche consume 6´3 litros de gasolina cada 100 km. Escribe la expresión algebraica de la función que refleje el consumo según el nº de km recorridos, construye una tabla de valores y dibuja la gráfica de la función. ¿De qué tipo de gráfica se trata?

FUNCIONES DE PRIMER GRADO:

Como hemos dicho en una ocasión anterior, las **funciones** que vamos a ver serán de **primer grado** porque la **V.I. (X) está elevada a exponente 1**. Todas las funciones que les ocurra tal cosa serán de primer grado. Si la X estuviera elevada a exponente 2 serían de 2º grado, ...

Pues de primer grado las hay de 2 tipos:

a) **F. Lineales →** Son aquellas que sólo tienen en su fórmula un nº multiplicando a la V.I. (X). Su expresión general es $f(x) = a \cdot x$, donde la "a" es un nº cualquiera llamado "constante o constante de proporcionalidad". Cuando hacemos una tabla de valores con ellas y las representamos gráficamente, siempre sale una recta que atraviesa todos los puntos y pasa por el origen de coordenadas.

b) **F. Afines →** Son aquellas que tienen en su fórmula un nº multiplicando a la V.I. (X) y otro que está sumando o restando. Su expresión general sería $f(x) = a \cdot x + b$, donde la "a" sigue siendo la constante y "b" es simplemente un nº entero. Cuando las representamos gráficamente, también sale siempre una recta que atraviesa todos los puntos y que no pasa por el origen de coordenadas.

LA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD "a" ("m" para el libro) o PENDIENTE:

Es el nº que está multiplicando a la V.I.. Es muy importante porque si es **positivo** (> 0) la recta de la función sale **ascendente**, es decir, desde la izquierda a la derecha la recta va hacia arriba (aumenta los valores de la "X" a la vez que van aumentando los valores de la "Y"). Si en vez de ser positiva fuese **negativo** (< 0) la recta de la función saldría **descendente**.

También es importante porque **cuanto mayor sea el valor absoluto de la "a" mayor inclinación tendrá la recta de la función**, y viceversa.

EJERCICIOS

3.- Representa en los mismos ejes las funciones $g(x) = -3x + 6$, $i(x) = \frac{2}{3} \cdot X + 2$ y $d(x) = \frac{-X}{3}$

Después, indica cuál es lineal y cuál es afín, y por qué. Indica también cómo son las rectas.

1.- Haz lo mismo que en el ejercicio anterior pero con estas funciones:

$$h(x) = x - 3 \ , \ a(x) = \frac{1}{4} \cdot x \quad y \quad c(x) = \frac{-7}{4} \cdot x + 1$$

2.- De la página 265 del libro, los nºs 1aef y 3.

INVENTARSE FUNCIONES QUE PASAN POR UN PUNTO DADO:

Este tipo de ejercicios suelen crear cierta dificultad pero se convierten en fáciles en el momento en el que se les coge el truquillo. Estamos ante un ejercicio como el siguiente:

"Invéntate 10 funciones que pasen por el punto (3, – 5)"

¿Qué significa que una función pasa por el punto (par de nºs) (3, – 5)? Pues lo que se quiere decir es que la X vale 3 y la Y vale – 5. Significa también que cuando a la X de la función la cambiemos por 3 y hacemos los cálculos necesarios, el resultado será "– 5".

Para inventarnos las 10 funciones que nos piden, se empieza por pensar en la primera parte de la función: el término que lleva la X ej. $f(x) = 6x +$ ¿? o $y = 6x +$ ¿?

He pensado en "6x". Como la "x" me dicen que vale 3 (según se ve en el punto) si lo multiplico por 6 saldría "18". Según dice el punto, la "y" debe salir "- 5". Por lo tanto, ¿qué nº tendré que sumarle a 18 para que salga – 5? Como ya lo habéis deducido, tendría que sumarle "- 23", por lo que la función quedaría

$$f(x) = 6x + (-23) \quad o \quad f(x) = 6x - 23 \quad o \quad y = 6x - 23$$

Esa sería la primera función. Aún nos quedarían 9 más. Nos las inventaríamos de la misma manera, pensando por ejemplo en "-2x" y luego sumándole "1" quedando así $g(x) = -2x + 1$

Valdría también pensar en "$4x^2$" y habría que restarle "- 41" y quedaría $h(x) = 4x^2 - 41$

También podría ser $a(x) = x^3 - 10x - 2$ si pensamos en "$x^3 - 10x$", y sería de "tercer grado".

EJERCICIOS DEL TEMA 13 "LAS FUNCIONES"

1.- "g" es una función que tiene el criterio (fórmula) "$x^2 + x - 1$" (o sea, $g(x) = x^2 + x - 1$). ¿Es lineal o afín? ¿Es de primer grado?

Calcula $g(1)$,, $g(\frac{1}{3})$,, $g(0)$,, $g(-\frac{1}{2})$,, $g(-\frac{4}{5})$.

2.- Escribe el criterio de una función "f" que cumpla estas condiciones: $f(2) = 5$ y $f(0) = 1$.

3.- La función "g" asocia a cada nº entero el anterior. Completa los nºs que faltan:

$g(7) =$ ¿? ,, $g(-5) =$ ¿? ,, $g($¿?$) = -3$,, $g($¿?$) = 0$

Expresa de forma matemática el criterio de "g".

4.- Las siguientes funciones son lineales. Escribe la constante de proporcionalidad de cada una. Haz como en el ejemplo:

Ej. $p(6) = -7$, quiere decir que la función lineal se llama "p" y que uno de sus puntos es (6, – 7), donde la "x" es "6" y la "y" es "– 7". ¿Cómo podemos sacar la "a" sabiendo un punto de la función? Fíjate:

$p(x) = a \cdot x$ o $y = a \cdot x$ Si despejamos la "a" de la expresión general nos quedaría $a = \frac{y}{x}$, lo que significa que si dividimos la "y" entre la "x" de un punto eso nos saldrá siempre la "a".

En el ejemplo, pues, la "a" sería: $a = \frac{y}{x} = \frac{-7}{6}$, por lo que la "a" valdría "$\frac{-7}{6}$" y la función sería

$$p(x) = \frac{-7}{6}x = \frac{-7x}{6} \qquad ó \qquad y = \frac{-7}{6}x = \frac{-7x}{6}$$

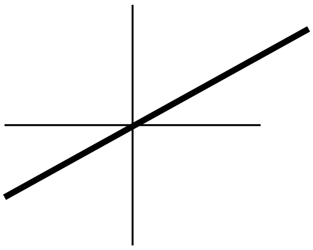
a) $f(-3) = 6$ b) $g(5) = 3$ c) $h(2) = \frac{1}{3}$ d) $j(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ e) $k(\frac{-4}{7}) = 9$

5.- Comprueba gráficamente si los siguientes conjuntos son pares de una misma función lineal:

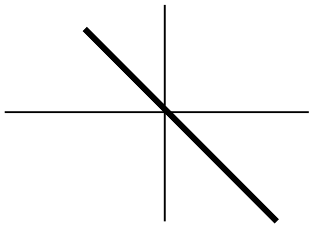
a) (1, 3) y (4, 1) b) (5, 3) y (10, 6) c) (2, 4) y (1, 2) d) (1, – 1) y (– 1, – 1)

6.- Las siguientes funciones están representadas en las siguientes rectas:

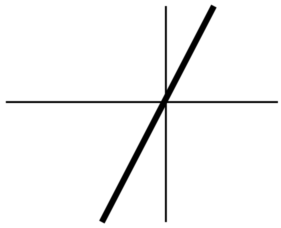
$f(x) = a \cdot x$



$g(x) = b \cdot x$



$h(x) = c \cdot x$



Indica cuáles de las constantes (a, b, c) son positivas y por qué. Luego, ordena de menor a mayor los valores de a, b y c.

7.- Escribe 2 funciones afines tal que (– 1, 4) sea uno de sus puntos.

8.- Escribe la función lineal que pasa por el punto (– 9, – 4) y llámala “q”.

9.- Escribe 12 funciones que pasen por el punto (– 1, 5).

10.- Observa el ejemplo: $f(0) = 2 \rightarrow (0, 2)$
$f(1) = 4 \rightarrow (1, 4)$ “Son 2 puntos de una misma función afín”

¿Qué significa que esos dos puntos pertenecen a la misma función afín? Pues sencillamente que cuando cambiemos a la “x” de la función por “0” y hagamos los cálculos necesarios, el resultado debe ser “2”, de ahí el punto (0, 2); y también significa que cuando a la “x” de la función la cambiemos por “1” y hagamos los cálculos correspondientes, el resultado será “4”, de ahí el punto (1, 4).

Queremos averiguar el criterio de la función afín que pasa por esos 2 puntos. Para ello partimos de la expresión general de las funciones afines, y sobre ella colocamos el primero de los puntos (el que empieza por 0 y ...): “b” $\rightarrow$ (0, 2)

$f(x) = a \cdot x + b$
$f(0) = a \cdot 0 + b = 2$
$0 + b = 2$
$\mathbf{b = 2}$ y con ello hemos averiguado la “b”

Luego seguimos con el segundo de los puntos que me han dado, el (1, 4), y a ver qué pasa:

“a” $\rightarrow$ (1, 4) $f(1) = a \cdot 1 + 2 = 4$
$a + 2 = 4$
$a = 4 - 2$
$\mathbf{a = 2}$ y con ello hemos averiguado la “a”

Por lo tanto, la función afín que pasa por esos dos puntos será:

$$\boxed{\mathbf{f(x) = 2 \cdot x + 2}}$$

ó

$$\boxed{\mathbf{y = 2 \cdot x + 2}}$$

Ahora te toca a ti. Haz tú lo mismo con: g : (0, 4) y (1, 3)

h : $(0, \frac{1}{2})$ y (2, 5)

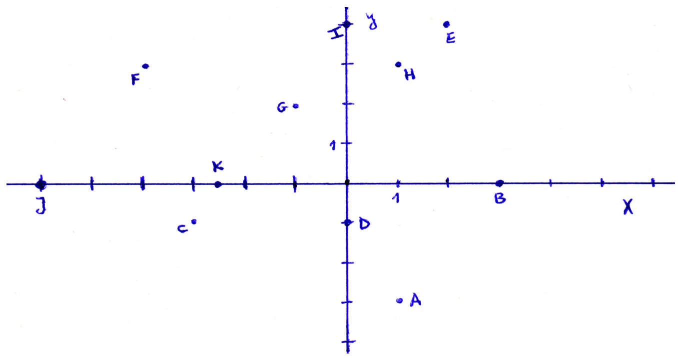
m : (4, 1) y (0, 3)

EJERCICIOS DEL TRABAJO: **(Seguro 12)** **7-T13--2ºESO**

1.- PÁGINA 269 del LIBRO → número 1.

2.- PÁGINA 269 del LIBRO → número 2.

3.- Indica las coordenadas de los puntos representados en esta figura. Hazlo alfabéticamente de la A a la K.



4.- PÁGINA 269 del LIBRO → número 3.

5.- PÁGINA 269 del LIBRO → número 4.

6.- PÁGINA 269 del LIBRO → número 7.

7.- PÁGINA 269 del LIBRO → número 8.

8.- PÁGINA 270 del LIBRO → número 14dg.

9.- PÁGINA 271 del LIBRO → número 19, pero solo indica qué pendientes son positivas o negativas y por qué. También di en qué se basa el libro para separar las rectas en 2 gráficas diferentes.

10.- PÁGINA 271 del LIBRO → número 20.

11.- Invéntate 10 funciones que pasen por el punto $(-3, 7)$.

12.- Represента las funciones siguientes en los mismos ejes, e indica si son lineales o afines, y por qué.

$$g(x) = -x - \frac{1}{4} \quad ,, \quad h(x) = -3x + 2 \quad ,, \quad i(x) = \frac{3}{4} \cdot x$$

¿Cómo salen las rectas?

13.- PÁGINA 272 del LIBRO → números 23 y 24. Van juntos.

14.- PÁGINA 273 del LIBRO → números 26.

15.- PÁGINA 273 del LIBRO → números 27.

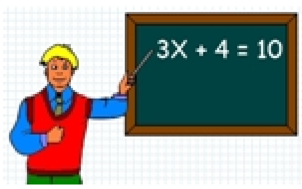
16.- PÁGINA 273 del LIBRO → números 28.

17.- PÁGINA 273 del LIBRO → números 30.

18.- Una piscina de 2500 litros de capacidad tiene un desagüe que la vacía a razón de 15 l/min. Si representamos como “x” el tiempo transcurrido en minutos y como “y” los litros de agua que quedan en la piscina cuando han transcurrido “x” minutos desde la apertura del desagüe, escribe la expresión algebraica de la función que relaciona “x” e “y”. NOTA: es obligatorio hacer una tabla de valores.

19.- Manolito es un amante de las canicas y por eso todos los días del mes de junio se va a comprar 1 bolsita con 5 canicas blancas en cada una. Representa la función que relaciona el número de bolsitas que comprará en junio Manolito con la cantidad de canicas que tendrá al paso de los días.

20.- PÁGINA 275 del LIBRO → Los 2 acertijos del “Entrénate resolviendo problemas”.



Fdo. Juan Chanfreut Rodríguez
Profesor de matemáticas de 2º de ESO