IGUALDAD (IDENTIDAD) Y ECUACIÓN:

Las **igualdades** (identidades) son **dos expresiones algebraicas idénticas aunque expresadas de forma diferente y están separadas por un igual**, como por ejemplo:

$$3a + a = 4a \;\;„\;\; -x + 6 + 6x - 4 = 5x + 2 \;\;„\;\; 4d \cdot (7 - 8m) = 28d - 32\,dm$$

Las **ecuaciones** son **igualdades entre dos expresiones algebraicas diferentes**, como por ejemplo:

$$3a + a = 8 \;\;„\;\; x - 9 = 7x + 1 \;\;„\;\; 5t + (-6 + 7t) = 19 - t$$

Las ecuaciones que vamos a ver al principio serán de "1^er grado" y es porque las incógnitas (letras) están elevadas a exponente "1". La novedad será que van a aparecer fracciones, por lo que la forma de solucionarlas cambia un poco el comienzo. Más tarde tocaremos las ecuaciones de 2º grado, que son aquellas que tendrán como mayor exponente de la incógnita un "2" (elevadas al cuadrado).

ELEMENTOS DE LAS ECUACIONES: Como deberíamos recordar del año pasado, toda ecuación consta de 2 **miembros** (todo lo que está a la izquierda se llama miembro de la izquierda o de las letras y todo lo que está a la derecha se llama miembro de la derecha o de los números), de **términos** (toda unión de n^os con letras mediante una multiplicación o solo n^os) y de **incógnitas** (cada una de las letras que aparecen en los términos y que en realidad son n^os a averiguar).

Por otro lado, las ecuaciones tienen un **grado**, un nº que, al igual que en los polinomios, coincide con el exponente más alto que se vea en el total de términos. Las primeras ecuaciones que veamos en este tema serán de "primer grado" porque las letras (incógnitas) estarán elevadas a "1" y finalizando el tema veremos las de "segundo grado" (las incógnitas tendrán como máximo un exponente "2").

SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES: Como deberíamos saber, las soluciones de las ecuaciones son **aquellos n^os que al cambiarlos por las incógnitas, y hacer los cálculos correspondientes, nos sale un mismo nº en los dos miembros**. En las ecuaciones de 1^er grado debería de haber una única solución, pero en las de 2º grado podría haber hasta un máximo de 2.

EJERCICIO

1.- De la página 138 del libro, el nº 1. También, de la página 141 del libro, los n^os 43, 48, 49, 51 y 54.

MÉTODO PARA SOLUCIONAR ECUACIONES DE 1^er GRADO: Para llegar a esta solución se siguen una serie de pasos parecidos a los del curso pasado, pero como nos vamos a encontrar en muchas de ellas denominadores (por no decir en todas) dichos pasos serán:

1º.- Pasar la ecuación completa, tanto el miembro de la izquierda como el de la derecha (todo junto), a común denominador, tal y como lo hacemos cuando tenemos operaciones simples de fracciones. En el caso de las ecuaciones, al calcular e MCM y dividirlo por los denominadores antiguos, el resultado de estas divisiones no se multiplicará directamente por el numerador sino que "**lo dejaremos indicado**". El motivo es que se puede cometer un fallo de un signo si no lo hacemos así, y como queramos hacerlo de otra manera y cometamos ese error, sintiéndolo mucho, no os puntuaré nada la ecuación.

2º.- Se tacharían los denominadores y las líneas de las fracciones, para copiar todo exactamente igual debajo.

3º.- Se queda convertida la ecuación como las de 1º de ESO, por lo que seguiremos con los paréntesis, luego pasaremos cada término a su lugar correspondiente, sumaremos los términos de cada miembro, despejamos la incógnita llevándonos al otro miembro el nº que multiplicaba a la incógnita (menos el 1 y – 1) y por último dividiremos la fracción resultante, o la simplificamos, si se pudiera.

Aquí va un ejemplo:

$$\frac{4x-4}{5} - \frac{2x+1}{3} = -7$$

$$\frac{3\cdot(4x-4)}{15} - \frac{5\cdot(2x+1)}{15} = -\frac{15\cdot 7}{15}$$

$$3 \cdot (4x-4) - 5 \cdot (2x+1) = -15 \cdot 7$$

$$12x - 12 - 10x \quad \text{“}\mathbf{-5}\text{”} \quad = -105$$

$$12x - 10x = -105 + 12 + 5$$

$$2x = -88$$

$$x = -\frac{88}{2} = -44 \qquad \boxed{\text{Sol. } x = -44}$$

¿Qué pasaría si no la solucionamos así? Fijaos

$$\frac{12x-12}{15} - \frac{10x+5}{15} = -\frac{105}{15} \rightarrow \quad 12x - 12 - 10x \quad \text{“}\mathbf{+5}\text{”} \quad = -105$$ ¿Veis ya el fallo?

<u>IMPORTANTE</u>: También nos podemos encontrar **ecuaciones de este otro tipo** → $\frac{2x-4}{x+1} = \frac{4}{5}$.

¿**Cómo se solucionan** si uno de los denominadores es “x + 1”? Parece complicado pero ¿qué es lo que veis en esa ecuación? Miradla bien. ¿Qué veis? ¿A qué se parece? ¿No son dos fracciones que están separadas por un igual? ¿Y eso qué significa? ¿Qué son equivalentes? ¿Y qué pasa cuando dos fracciones son equivalentes? Pues sí, eso pasa, que **al multiplicarlas en cruz sale el mismo resultado**. Entonces, lo único que habrá que hacer es

$$\frac{2x-4}{x+1} = \frac{4}{5}$$

$$5 \cdot (2x-4) = 4 \cdot (x+1)$$

$$10x - 20 = 4x + 4$$

$$10x - 4x = 4 + 20$$

$$6x = 24$$

$$x = \frac{24}{6} = 4 \qquad \boxed{\text{Sol. } x = 4}$$

EJERCICIOS

1.- De la página 142 del libro, los n^{os} 1d, 2e, 3f y 4e. De la página siguiente, los n^{os} 1c, 2a, 3b y 4b.

2.- Resuelve estas ecuaciones: a) $\mathbf{\frac{2x-1}{5} - 5 = \frac{x+4}{3} - \frac{7}{2}}$ b) $\mathbf{\frac{x-5}{x+6} = \frac{4}{3}}$

c) $\mathbf{2x - \frac{1-3x}{10} - \frac{2}{3} = 2(x-3) + \frac{1}{5}}$ d) $\mathbf{\frac{1}{5x-7} = \frac{-3}{2x-8}}$ e) $\mathbf{\frac{6}{5} = \frac{x-7}{2(x+1)}}$

<u>NÚMERO DE SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DE 1er GRADO:</u>

Por lo general, una ecuación de primer grado suele tener una sola solución, es decir, un solo valor para la letra que hace que se obtenga al final el mismo resultado en los dos miembros. Pero veamos algunas cosas que nos puede llegar a ocurrir. Partimos del paso cuando tenemos “a · x = b”, donde “a y b” son dos n^{os} determinados:

a.- <u>Si “a y b” son dos n^{os} distintos de “0”</u>: Tendría **una única solución** que sería la división de “b” entre “a”, como las ecuaciones que hemos visto siempre. Sol. x = $\boldsymbol{\frac{b}{a}}$

b.- Si "a" no es "0" pero "b" sí es "0":

Tendría **también una única solución**, pero al dividir "b" entre "a", como "b" es **"0"**, la solución en estos casos siempre saldrá "0". Sol. $x = \frac{b}{a} = \frac{0}{a} = 0$

c.- Si "a" es "0" pero "b" no es "0": Tendríamos que dividir "b (un nº)" entre "a (0)", y habría que buscar un nº que multiplicado por "0" saliera un nº distinto de "0". ¿Es eso posible? No, no es posible, ya que cualquier nº multiplicado por "0" siempre nos saldrá "0". Esto significa, entonces, que este tipo de ecuaciones no tienen solución. Sol. $x = \frac{b}{a} = \frac{b}{0}$ = b : 0 = No es posible, **Sin solución**

d.- Si "a y b" son "0": Tendríamos que dividir "0" entre "0", y entonces cualquier nº valdría ya que al multiplicar cualquier nº por "0" el resultado siempre saldrá "0". Por lo tanto, este tipo de ecuaciones tienen infinitas soluciones. Sol. $x = \frac{b}{a} = \frac{0}{0}$ = 0 : 0 = **Infinitas soluciones**

EJERCICIOS

1.- Clasifica las siguientes ecuaciones según su nº de soluciones:

a) $2x + 5 = 7(-3 + x) - 4x$ b) $2x - 2 = 3(x - 3) - (x - 6) + 1$ c) $\frac{5}{3} = \frac{10x-7}{6(x+1)}$

2.- De la página 143 del libro, el nº 4cd.

APLICACIONES DE LAS ECUACIONES A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS:

Sin duda, una de las cosas más "entretenidas" de hacer con las ecuaciones es resolver problemas. Ya se sabe que el fin último de las ecuaciones es precisamente eso, resolver problemas. Cuando tenemos el problema por delante, muchas veces "suspiramos" y "nos negamos ante él" porque nos creemos que no vamos a ser capaces de resolverlo. Al principio nos puede pasar, pero cuando hagamos varios será "pan comido".

Si queremos resolver los problemas sin muchas dificultades, lo primero que tenemos que saber es transcribir lo que me está diciendo el problema en "lenguaje ordinario" a un "lenguaje matemático o algebraico". Por lo tanto, es conveniente empezar por ahí. Hagamos este ejercicio:

EJERCICIO

3.- Transcribe al lenguaje matemático/algebraico: El doble de un nº,, la tercera parte de un nº,, las dos quintas partes de un nº,, el nº siguiente de "a",, tres nºs pares consecutivos,, la suma de la cuarta parte de un nº con su cuádruple,, dinero que me queda después de gastarme 100 €,, años que tendrá Eva dentro de 6 años,, tres múltiplos de 5 consecutivos,, 4 nºs consecutivos,, el doble de la suma del cuadrado de x más y,, la suma del doble del cubo de a y la mitad de b,, resta de los cuadrados de p y q,, canicas que tengo ahora si tenía 45 y me dan unas pocas,, melones y sandías que tengo si entre las dos frutas tengo 15 frutas,, perímetro de un cuadrado de lado m,, resultado de dividir un nº entre 7,, edad que tenemos mi hijo y yo si entre los dos tenemos 50,, el anterior del doble de un nº,, lo que me queda por pagar de una lavadora si ya he desembolsado 1/5 y 2/7 de su valor,, litros que quedan en una garrafa después de sacar 19 litros.

4.- De la página 137 del libro, el nº 1.

Retomando el tema, diremos que para resolver los problemas con ecuaciones hay que tener serenidad y paciencia y seguir una serie de pasos "supernecesarios" para poder obtener el resultado que se desea. Dichos pasos son (vienen muy bien en la página 117 del libro aunque sean menos):

a.- **Lectura comprensiva del problema**. Léelo cuantas veces sea necesario, punto por punto, si no lo entiendes, léelo más despacito. No te des por vencido. Un enunciado largo no es sinónimo de difícil. Al ir leyendo, debes poner a la izquierda los datos del problema, que te servirán de gran ayuda.

b.- **"Endiñar" la "x" al dato que pregunta el problema**.

Una vez leído el problema, se le debe poner la "x" a algún dato. Generalmente me lo indica la pregunta del problema. Después, al resto de los datos le traducimos lo que nos diga el propio enunciado.

c.- **Plantear la ecuación**. Puede ser lo más complicado pero es lo que nos llevará a tener bien o mal el ejercicio. Para plantearla, debemos utilizar un "RAZONAMIENTO" el cual va a ser obligatorio. Muchas veces, el planteamiento es "si sumo esto, con esto y esto me sale esto otro".

d.- **Resolver la ecuación para llegar a la solución**. Este paso debe ser el más fácil ya que resolver una ecuación, a estas alturas, no debe suponer ningún problema. Y máxime cuando la ecuación que debáis plantear y resolver es bastante sencillita.

e.- **Indicar perfectamente cuál es la solución**. Finalmente, al concluir un problema debéis poner bien clara la solución que os ha salido, respondiendo en todo a la pregunta que os hace el problema. Muchos de vosotros lo que hacéis es poner la solución por ahí perdida para que yo la encuentre y así no se debe dejar.

f.- **Comprobar la solución**. Este paso no es estrictamente necesario pero os puede ayudar a saber si tenéis bien el problema. A veces os sale una solución "casi imposible" o "extraña". Debéis cambiar un resultado de este tipo. Por ejemplo, en un problema que a lo mejor hacéis, se os pregunta por el peso de una persona. Si os sale 834 kg, creo que no estará muy bien que digamos.

Practiquemos un poco con estos problemas que haremos entre todos

PROBLEMAS DE ECUACIONES

Problema 1 → Al sumar 37 al doble de un nº obtenemos 97. ¿De qué nº se trata?

Problema 2 → Un padre tiene 33 años y su hijo 8. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será el doble que la del hijo?

Problema 3 → Un ciclista recorre la distancia que separa dos ciudades en tres etapas. En la primera recorre un tercio del trayecto; en la segunda, un cuarto, y en la tercera, los 35 km restantes. ¿Cuántos km separan las dos ciudades?

EJERCICIOS

1.- De la página 144 del libro, los nºs 1, 2 y 3. De la página siguiente, los nºs 4, 6 y 7. De la 147, el nº 13.

2.- Halla un nº sabiendo que su tercera parte disminuida en 125 es igual a 175.

3.- Una madre tiene 57 años y su hija, 32. ¿Cuántos años hace que la edad de la madre era el doble que la de la hija?

4.- Busca un nº sabiendo que su séptima parte más sus dos terceras partes da 51.

5.- La suma de 3 múltiplos consecutivos del nº 7 es igual a 2.373. ¿Cuáles son esos múltiplos?

6.- En el hotel que estuve de vacaciones en el verano pasado me permitieron contar los tenedores que tenían en el restaurante principal (la ilusión de toda mi vida). Si no me equivoqué, fueron 1625. Si los había de 3 y de 4 puntas, ¿cuántos había de cada clase si conté 5792 puntas en total?

7.- De la lista de "82 problemas de ecuaciones" que os propongo en un documento aparte, elegiremos 17 para hacerlos también en clase y entre todos. Los demás son para que practiquéis en casa.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO: Como ya hemos dicho son todas aquellas que tienen un "2" (cuadrado) como máximo exponente de la incógnita. La expresión general de todas las ecuaciones de este tipo es $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ donde la "a" es el nº que está multiplicando al término de la "x^2", "b" es el que multiplica al término de la "x" y "c" es el nº que va solo. Ejemplo:

En la ecuación $3x^2 - x + 8 = 0$ → "a" vale 3 ,, "b" vale – 1 ,, "c" vale 8

En la ecuación $-x^2 + 2x + \frac{3}{4} = 0$ → "a" vale – 1 ,, "b" vale 2 ,, "c" vale $\frac{3}{4}$

Las ecuaciones que he puesto de ejemplos se llaman "completas" porque tienen todos los términos que pueden haber en una ecuación de 2º grado. Es decir, se llama **ecuación de 2º grado completa a aquella que tiene "a, b y c"** (todos los términos).

Si faltara alguno de los términos la ecuación se llamaría incompleta, como por ejemplo:

$4x^2 + x = 0$ → "a" es 4 ,, "b" es 1 ,, "c" es 0 $\qquad - 2x^2 + 3 = 0$ → "a" es – 2 ,, "b" es 0 ,, "c" es 3

$- 7x^2 = 0$ → "a" es – 7 ,, "b" es 0 ,, "c" es 0

Está claro que para que una ecuación de 2º grado sea incompleta debe faltar alguno de los términos, alguno menos el que contiene a la "x^2", de lo contrario dejaría de ser de 2º grado.

EJERCICIO

1.- De la página 148 del libro, el nº 1bcdgh.

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES INCOMPLETAS "$ax^2 = 0$": Estas ecuaciones son las más fáciles porque siempre la **única solución será "0"** debido a que es el único nº que al elevarlo al cuadrado y después multiplicarlo por "a" el resultado sale "0". Veamos un ejemplo:

$$5x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{5}} = \mathbf{0} \rightarrow x = \boxed{\sqrt{\mathbf{0}} = \mathbf{0}}$$

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES INCOMPLETAS "$ax^2 + c = 0$": Estas ecuaciones pueden o no tener solución. Todo dependerá de los valores de "a" y "c". Para que tengan solución esos valores tendrán que ser de distinto signo, pues de lo contrario saldría una raíz cuadrada negativa la cual ya sabemos que no tiene solución. Para solucionar este tipo de ecuaciones se pasa primero "c" al otro miembro, luego "a" y luego, a lo que haya, se le hace la raíz cuadrada. Veamos un ejemplo:

$$5x^2 - 20 = 0 \rightarrow 5x^2 = 20 \rightarrow x^2 = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{5}} = \mathbf{4} \rightarrow x = \boxed{\sqrt{\mathbf{4}} \pm \mathbf{2} \text{ (2 soluciones)}}$$

$$3x^2 + 75 = 0 \rightarrow 3x^2 = -75 \rightarrow x^2 = \frac{\mathbf{-75}}{\mathbf{3}} = \mathbf{-25} \rightarrow x = \boxed{\sqrt{\mathbf{-25}} = \text{ Sin solución}}$$

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES INCOMPLETAS "$ax^2 + bx = 0$": Estas ecuaciones siempre van a tener un par de soluciones. Una siempre será "0" y la otra será lo opuesto a lo que salga la división de "b : a". Se empieza siempre sacando factor común a "x". Veamos un ejemplo:

$$3x^2 + 7x = 0 \rightarrow x \cdot (3x + 7) = 0$$

Si os dais cuenta, veis un par de factores cuyo resultado es "0". Eso significa que, o bien el primer factor ("x") es "0", o bien el 2º (3x + 7) es "0". Por lo tanto, la primera solución será "x = 0", y la segunda saldrá de despejar esa pequeña ecuacioncilla.

$$x \cdot (3x + 7) = 0 \begin{cases} \boxed{X_1 = 0} \\ 3x + 7 = 0 \rightarrow 3x = -7 \rightarrow \boxed{X_2 = \frac{\mathbf{-7}}{\mathbf{3}}} \end{cases}$$

SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES COMPLETAS "$ax^2 + bx + c = 0$": Para las ecuaciones completas solo hay que aplicar una fórmula, la cual debéis memorizar (no hay más). Esa fórmula es:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En estas ecuaciones pueden suceder tres casos distintos: que hayan 2 soluciones, que haya una única solución o que no haya ninguna solución. Todo dependerá de lo que salga en la raíz cuadrada (llamada "discriminante").

Si en el radicando de $\sqrt{b^2 - 4ac}$ sale un nº positivo la ecuación tendrá 2 soluciones distintas.

Si en el radicando de $\sqrt{b^2 - 4ac}$ sale "0" la ecuación tendrá una única solución.

Si en el radicando de $\sqrt{b^2 - 4ac}$ sale un nº negativo la ecuación no tendrá ninguna solución porque esa raíz cuadrada no se podría hacer.

EJERCICIOS

1.- De la página 150 del libro, los nºs 1bcefgjk, 2efgijl, 3befh y 4ad.

EJERCICIOS DEL TRABAJO: (Seguro 12)

1.- PÁGINA 151 del LIBRO → número 3acdf.

2.- PÁGINA 151 del LIBRO → número 5cd. Además, le metemos estos 2 apartados:

k) $\dfrac{3}{5} = \dfrac{2x-7}{3(x+20)}$ m) $\dfrac{4x-4}{5} - \dfrac{2x+1}{3} = -7$

3.- PÁGINA 151 del LIBRO → número 6abfh.

4.- PÁGINA 151 del LIBRO → número 7ad. Haced también estos otros 2 apartados:

k) $-6 = \dfrac{-x-1}{x+4}$ m) $3 - \dfrac{6+5x}{2} = -\dfrac{x}{4} + 9$

5.- PÁGINA 151 del LIBRO → número 10bfgj.

6.- PÁGINA 152 del LIBRO → número 11bchj.

7.- PÁGINA 152 del LIBRO → número 12bd.

8.- Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $x^2 - x = 0$ b) $(x+3)^2 = 64$ c) $9x = 18x^2$ d) $-9x^2 + 4 = 0$

9.- Resuelve las siguientes ecuaciones de 2º grado:

a) $7x - 21x^2 = 0$ b) $5x = 3 - 2x^2$ c) $x^2 - 3x = x - 3$ d) $5x^2 + 20 = 0$

10.- Resuelve estas otras ecuaciones de 1er o 2º grado:

a) $(x-5) \cdot (3x+9) = 0$ b) $3(x+8) - (x-4) = 12$ c) $x^2 = 9x^2 - 4x$ d) $x^2 = 3x^2$

11.- Un cable telefónico tiene $\frac{1}{2}$ de su longitud al aire libre, "los $\frac{2}{5}$ del resto" están subterráneos y, por último, los 12 km restantes van por debajo del agua. ¿Qué extensión tiene el cable?

12.- Silvia posee diversos minerales y cajas, de manera que si coloca 5 minerales en cada caja, queda una vacía y si coloca 4, queda un mineral sin caja. ¿Cuántos minerales y cajas tiene Silvia?

13.- PÁGINA 152 del LIBRO → número 16.

14.- Un trayecto en taxi cuesta 2,50 € de bajada de bandera y 1,50 € por cada km. Si pagamos 13 €, ¿qué distancia hemos recorrido?

15.- PÁGINA 152 del LIBRO → número 20.

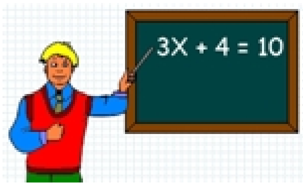
16.- PÁGINA 152 del LIBRO → número 24.

17.- PÁGINA 152 del LIBRO → número 25.

18.- PÁGINA 153 del LIBRO → número 29.

19.- PÁGINA 153 del LIBRO → número 32.

20.- PÁGINA 153 del LIBRO → número 37.



Fdo. Juan Chanfreut Rodríguez
Profesor de matemáticas de 2º de ESO