APUNTES Y EJERCICIOS DEL TEMA 6 → OPERACIONES CON POLINOMIOS 1-T6--2ºESO

EXPRESIONES ALGEBRAICAS. OPERACIONES: Son combinaciones de nos y letras unidos con operaciones matemáticas (aritméticas), que generalmente suelen ser "sumas, restas, multiplicaciones y divisiones". Por tanto, una expresión algebraica tiene dos partes:

a) Los coeficientes, que son los números que aparecen acompañando a las letras y que suelen ir a la izquierda de ellas multiplicando.

b) La parte literal, que son las letras, y suelen aparecer a la derecha.

Coeficientes → $\mathbf{43 \cdot X = 43\,X}$ ← partes literales

$\mathbf{-\,7 \cdot a^3 = -\,7\,a^3}$

TÉRMINOS: A la unión de un coeficiente (nº) con una o varias partes literales (letras) multiplicando se la denomina "**término**". Por ello, arriba estamos viendo dos términos diferentes: uno es "43X" y el otro es "$-\,7a^3$" (que es lo mismo que $-\,7\cdot a\cdot a\cdot a$). Se diferencian los dos términos en las letras que acompañan a los coeficientes.

Las expresiones algebraicas no sólo constan de un único término. Pueden aparecer expresiones algebraicas con varios términos unidos mediante sumas o restas, y por ello encontramos:

a) Monomios, que son las ex. alg. que tienen un solo término. ($43X$,, $8w$,, $-7a^3$,, $\frac{bh}{6}$)

b) Binomios, que son las ex. alg. que tienen dos términos. ($x + 3$,, $-\,4b^2 + 7x$,, $66p - 12k$)

c) Trinomios, ... tres términos. ($ax^4 + 6c - 5$,, $b + y + 21s$,, ...)

d) Polinomios, ... cuatro o más términos. ($a^5 + 2w - 7z^2 - 15$,, $6m^2 - 3p - 9t^8w + 9y$,...)

Importante es saber que, en general, las expresiones algebraicas con 2 o más términos se les suele llamar ya "Polinomios" a pesar de que no lleguen a los 4 términos. Es decir, que si una expresión algebraica tiene tan solo 2 términos ya se le puede llamar "**Polinomio**", aunque por tener solo 2 términos recibirá concretamente el nombre de "Binomio". Se les nombran, generalmente, por una letra mayúscula. Ejemplos: $P(x) = bx^3 + x^2y + 21s$,, $Q(x) = 2x^4z + 3a^2x^2 - 1$

Por otro lado, si en un término no aparece un coeficiente estamos diciendo que es el nº "1" ya que es el único nº que al multiplicarlo por cualquier letra sale esa misma letra.

$$\mathbf{X = 1 \cdot X \quad ,, \quad a^3 = 1 \cdot a^3 \quad ,, \quad -X = -1 \cdot X \quad ,, \quad -w^5 = -1 \cdot w^5}$$

También es importante saber que si un coeficiente no va acompañando a ninguna parte literal (letra) se le llama "**término independiente**". Se puede apreciar uno de estos términos en una de las páginas siguientes, pero aquí va un adelanto: $7x^2 + 9x\ \mathbf{-\ 12}$ (es el que tenéis en negrita y grande).

Por último, indicar que todo monomio o polinomio posee lo que se llama un "**GRADO**". Para saber ese grado habrá que buscar el término cuya suma de los exponentes de las partes literales sea mayor. Ejemplos:

$3a^4$ → de 4º grado ,, $-\,9a^5b^2 + 3ab^3$ → de 7º grado ,, $6m^2 - 3p - 9t^8w + 9y$ → de 9º grado

VALOR DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA (MONOMIO O POLINOMIO):

Se entiende por valor "lo que vale" una expresión algebraica. Por ejemplo, ¿cuánto vale $3d^2 + 2$? Supongo que diréis que "no sé cuánto vale "d", ¿no?" Pues efectivamente. Dependiendo de lo que valga esa letra que aparece, así valdrá esa expresión algebraica. Si en el ejemplo la "d" valiese (– 6) el valor de la exp. alg. sería

$$\mathbf{3d^2 + 2}$$

$$3 \cdot (-\,6)^2 + 2 = 3 \cdot 36 + 2 = 108 + 2 = 110$$

Si en vez de valer "d" (– 6) valiera otra cifra distinta, el resultado sería otro. Por lo tanto, ¿**cuánto vale una exp. alg.**? Pues si la letra "d" la podemos cambiar por la cifra que queramos, y como los nos son infinitos, la respuesta a la pregunta será que **tiene infinitos valores**.

TÉRMINOS SEMEJANTES:

Se les llama así a los términos que tienen exactamente la misma parte literal (letras). Pueden parecerse en la letra, pero como no tengan exactamente la misma cantidad no serán semejantes. Ejemplos:

a) Semejantes → $4X$ con $-5X$ „ $3a^4$ con $-9a^4$ „ $34bw^2$ con $5bw^2$ „ $-q^6$ con $-22q^6$

b) No semejantes → $4X$ no con $5X^3$ „ $21ab^2$ no con $34ab$ ni con $-9a^5b^2$ ni con $3ab^3$

OPERACIONES CON MONOMIOS Y POLINOMIOS: Las operaciones son parecidas a las del año pasado. Recordemos las más simples:

a) SUMA Y RESTA DE MONOMIOS → Deben ser semejantes. De lo contrario no se podrá hacer. **Se suman o restan los coeficientes y se deja la misma parte literal**. Ejemplos:

$4X + (-5X) = -X$ „ $3a^4 - (-9a^4) = 3a^4 + 9a^4 = 12a^4$ „ $-8bw^2 + 5bw^2 = -3bw^2$ „ $-q^6 - 2q^6 = -3q^6$

b) MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS → En este caso se puede hacer siempre, no hace falta que sean semejantes. **Se multiplican los coeficientes y las partes literales**. Ejemplos:

$4X \cdot (-5X) = -20X^2$ „ $-3a^4 \cdot (-9ab^4) = 27a^5b^4$ „ $-8bw^2 \cdot 5bw = -40b^2w^3$„ $\dfrac{c^3}{2} \cdot 7c^{60} = \dfrac{7c^{63}}{2}$

c) DIVISIÓN DE MONOMIOS → Se pueden hacer cuando el grado del monomio del dividendo sea mayor o igual al del divisor. **Se dividirán los coeficientes y las partes literales** (no habrá resto nunca). Ejemplos:

$8X^2 : (-2X) = -4X$ „ $-27a^4 : (-3a^3) = 9a$ „ $-10b^5w^3 : 5b^2 = -2b^3w^3$ „ $6m^3z : 5m^3z = \dfrac{6}{5}$

EJERCICIOS

1.- De la página 119 del libro, los n^{os} 1, 4abdf, 6bdefg, 8bcgh, 9adeh, 11bde, 12bc y 13c. De la página siguiente, los n^{os} 16, 17bcde y 18bdf.

2.- De la página 121 del libro, los n^{os} 2b y 3.

3.- Indica el coeficiente y la parte literal de cada uno de los términos de estas expresiones algebraicas:

a) $5xy$ b) $5x + y$ c) $1 - 2a + 3a^2 - \dfrac{b}{2}$ d) $3b - 2ab + a^2b - \dfrac{3bk^2}{5}$ e) $x^5 - 3$

4.- De los siguientes términos, di cuáles son semejantes: xy , $2x^2$, $2x^2y$, $-7xy$, $7x^2$, $2xy$, $\dfrac{xy}{2}$, $-xx$

5.- Calcula, en cada caso, los valores de estas expresiones algebraicas:

a) $-2a + ab + c$ si $a = 4$, $b = \dfrac{1}{2}$, $c = 2$ b) $2ab + \dfrac{3b}{2}$ si $a = 1$, $b = -2$

6.- Invéntate una expresión algebraica de 4 términos no semejantes que valga – 8, y en la que aparezcan, al menos, 2 letras distintas.

d) SUMA DE POLINOMIOS → Se pueden hacer siempre. **Se suman todos los términos semejantes** y se ponen ordenados en la suma. Ejemplos:

$$\begin{array}{rl}
+ & P(x) = 3x^4 + 2x^3 \qquad - 6x + 1 \\
 & R(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 \qquad - 3 \\
\hline
 & P(x) + R(x) = \mathbf{4x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x - 2}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
+ & S(x) = -8m^5 + 6m^4 \qquad - 5m \\
 & T(x) = 9m^5 \qquad - 15m^3 \qquad - am \\
\hline
 & S(x) + T(x) = \mathbf{m^5 + 6m^4 - 15m^3 - 5m - am}
\end{array}$$

e) RESTA DE POLINOMIOS → Se pueden hacer siempre. Como restar es lo mismo que "sumar el opuesto" pues **al primer polinomio se le sumará el opuesto del segundo** y se ponen ordenados en la diferencia. Ejemplos:

$$\begin{array}{l}
P(x) = 3x^4 + 2x^3 \qquad - 6x + 1 \\
-R(x) = -x^4 + 6x^3 - 7x^2 \qquad + 3 \\
\hline
P(x) - R(x) = \mathbf{2x^4 + 8x^3 - 7x^2 - 6x + 4}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
S(x) = -8m^5 + 6m^4 \qquad - 5m \\
-T(x) = -9m^5 \qquad + 15m^3 \qquad + am \\
\hline
S(x) - T(x) = \mathbf{-17m^5 + 6m^4 + 15m^3 - 5m + am}
\end{array}$$

f) PRODUCTO DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIIO →

Se pueden hacer siempre. Lo único que se hace es **multiplicar el monomio por todos los términos del polinomio** y se coloca de forma ordenada. Ejemplos:

$$\begin{array}{lr} P(x) = & -7x^{10} + 3x^4 + 2x^3 - 6ax^2 - 2 \\ \times\ T(x) = & 4x^2 \\ \hline P(x) \cdot T(x) = & \mathbf{-28x^{12} + 12x^6 + 8x^5 - 24ax^4 - 8x^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{lr} S(x) = & -8m^5 + 6m^4 - m^3 - \frac{6}{5} \\ \times\ V(x) = & -5bm \\ \hline S(x) \cdot V(x) = & \mathbf{40bm^6 - 30bm^5 + 5bm^4 + 6bm} \end{array}$$

g) PRODUCTO DE DOS POLINOMIOS → Se pueden hacer siempre. Hay que **multiplicar cada término del 2º factor por todos los términos del polinomio colocado como primer factor** colocándolo de forma ordenada (si hace falta, se dejan espacios). Ejemplo:

$$\begin{array}{lcccccccccc} & & & A(x) = & -7a^7 & & +a^5 & +2a^4 & & -6a^2 & & -1 \\ \times & & & M(x) = & & & & & & -5a^2 & +3a & +2 \\ \hline & & & & -14a^7 & & +2a^5 & +4a^4 & & -12a^2 & & -2 \\ & & -21a^8 & & & +3a^6 & +6a^5 & & -18a^3 & & -3a & \\ & 35a^9 & & & -5a^7 & -10a^6 & & +30a^4 & & +5a^2 & & \\ \hline \end{array}$$

A (x) · M (x) = $\mathbf{35a^9 - 21a^8 - 19a^7 - 7a^6 + 8a^5 + 34a^4 - 18a^3 - 7a^2 - 3a - 2}$

EJERCICIOS

1.- De la página 122 del libro, los nº^os^ 5bd, 6b y 7bc. De la página siguiente, los nº^os^ 8cfgjkl, 9bcd y 10bc.

h) DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN MONOMIIO → Se pueden hacer siempre y cuando los términos del dividendo sean de un grado superior al del divisor. Lo único que se hace es dividir todos los términos del polinomio por el monomio del divisor. En caso de haber algún término en el dividendo con un grado menor al del divisor éste (o estos) término/s sería/n el resto. Ejemplo:

$$7x^{10} + 8x^4 + 2x^3 - 16ax^2 - x \ : \ 4x \ = \ \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}x^9 + 2x^3 + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}}x^2 - 4ax - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}x^9 + 2x^3 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}x^2 - 4ax - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

i) DIVISIÓN DE UN POLINOMIO POR UN BINOMIIO → Para averiguar cada término del cociente se va **dividiendo el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor**, para luego proceder como en las divisiones normales (se multiplica el término del cociente por el binomio y se restará el resultado a lo que tengamos en el dividendo**.** Finalmente, en caso de haber algún término en el dividendo con un grado menor al del divisor éste (o estos) término/s sería/n el resto. Ejemplo:

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 6x^6 & -9x^4 & +2x^3 & -16x^2 & -3x & & x^2 - 2 \\ \cline{7-7} -6x^6 & +12x^4 & & & & & 6x^4 + 3x^2 + 2x - 10 \\ \cline{1-2} & 3x^4 & +2x^3 & -16x^2 & -3x & & \\ & -3x^4 & & +6x^2 & & & \\ \cline{2-4} & & 2x^3 & -10x^2 & -3x & & \\ & & -2x^3 & & +4x & & \\ \cline{3-5} & & & -10x^2 & +x & & \\ & & & 10x^2 & & -20 & \\ \cline{4-6} & & & & x & -20 & \end{array}$$

Resto

1.- Dado los polinomios B (x) = $x^5 - 2x^4 - 5x^3 + x - 3$ y E (x) = $x^3 + 1$, haz la división de los dos.

2.- Haz lo mismo con los polinomios G (x) = $2c^6 - 3c^4 + 4c^3 - 3$ y H (x) = $-c^3 + 1$.

3.- Divide K (x) = $4m^7 + 7m^6 - 3m^5 - 14m^4 + 3m^3 + 31m^2 - 7m - 7$ y Z (x) = $4m^2 - m - 1$.

j) PROPIEDAD DISTRIBUTIVA Y SACAR FACTOR COMÚN → Tal y como hacíamos el año pasado, para aplicar la propiedad distributiva debemos encontrarnos un término multiplicando a un paréntesis, y dentro de este paréntesis un polinomio cualquiera. ¿Cómo se hacía? Pues claramente, el término que tenemos fuera debe multiplicar a todos y cada uno de los términos del polinomio interior. Veamos el ejemplo:

$$2c \cdot (3\,ac - 9\,c^2 + 8\,b^3cz) = 2c \cdot 3ac - 2c \cdot 9c^2 + 2c \cdot 8b^3cz = 6\,ac^2 - 18\,c^3 + 16\,b^3c^2z$$

(como se aprecia las letras se colocan en orden alfabético)

Para **sacar factor común** (s.f.c.), en estos casos, se hace de forma parecida ya que tenemos en los términos dos elementos bien diferentes: los coeficientes y la parte literal. Para sacar el coeficiente correcto debo hacer el MCD de todos los coeficientes que aparecen, y para sacar la parte literal correcta debo escoger la/s letra/s que estén en todos los términos y con el menor de los exponentes con el que aparezca. Veamos este ejemplo:

$$8\,a^3b^2 + 12\,a^2c - 28\,a^4d^4z = \mathbf{4\,a^2} \cdot (2\,ab^2 + 3\,c - 7\,a^2d^4z) \qquad \text{El MCD de (8, 12 y 28) es 4}$$

En ocasiones no es posible sacar factor común al “coeficiente o a la parte literal”, y puede hasta que no se pueda sacar nada. Todo dependerá de los términos que nos encontremos. Veámoslo:

$$3d^2 - 7d^3 = d^2 \cdot (3 - 7d) \;„\; 8e^2 + 12e^4f - 4f^2 = 4 \cdot (2e^2 + 3\,e^4f - f^2) \;„\; 6cd^4 - 8cf + 9fg - 17h = \text{XXXX}$$

EJERCICIOS

4.- De la página 126 del libro, los nos 7bceg, 8bdgh y 9.

5.- Saca factor común: a) $9x^6 + 12x^4 - 6x$ b) $-2x^3z + 40xyz^2 - 10xy$ c) $24b^2m^3 - 36bm^4 + 60bm^2x$

k) IGUALDADES O PRODUCTOS NOTABLES → Viene perfectamente explicado en el libro. De todas formas, os indico que son 3 tipos de multiplicaciones especiales donde el resultado sigue siempre un mismo patrón. Estos productos son

a.- **Cuadrado de una suma**. Se reconoce porque dentro de un paréntesis hay dos términos del mismo signo (los 2 positivos o los 2 negativos) y dicho paréntesis está elevado al cuadrado. Para hacerlo o desarrollarlo, se pone “**el cuadrado del primer término, más el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término**”. Valgan estos ejemplos:

$$(2x + 9)^2 = 4x^2 + 36x + 81 \;„\; (\frac{5b}{2} + x^3)^2 = \frac{25b^2}{4} + 5bx^3 + x^6 \;„\; (-c^2 - \frac{7}{6})^2 = c^4 + \frac{7c^2}{3} + \frac{49}{36}$$

b.- **Cuadrado de una diferencia**. Es lo mismo de arriba, pero los dos términos son de diferente signo. Para desarrollarlo, se hace “**el cuadrado del primer término, menos el doble del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo término**”. Mirad estos ejemplos:

$$(2x - 9)^2 = 4x^2 - 36x + 81 \;„\; (-\frac{5b}{2} + x^3)^2 = \frac{25b^2}{4} - 5bx^3 + x^6 \;„\; (-c^2 + \frac{7}{6})^2 = c^4 - \frac{7c^2}{3} + \frac{49}{36}$$

c.- **Suma por diferencia**. En este caso, nos encontramos con dos paréntesis multiplicando, y dentro de ellos los mismos términos, pero en el primer paréntesis el segundo término es positivo y en el segundo paréntesis es negativo (o viceversa).

Para realizarlo, se coloca “**el cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo**”. Aquí vienen los ejemplos:

$$(3x + 8) \cdot (3x - 8) = 9x^2 - 64 \;„\; (\frac{5b}{2} + \frac{7}{6}) \cdot (\frac{5b}{2} - \frac{7}{6}) = \frac{25b^2}{4} - \frac{49}{36} \;„\; (a^{10} - m) \cdot (a^{10} + m) = a^{20} - m^2$$

1.- Haz el doble a los siguientes términos: 4 , x , $-3x$, t^2 , $\frac{7}{6}$, $-5ab^4$, $\frac{5b}{2}$, $3\sqrt{x}$, $\frac{-w^7}{8}$, $12m^3p^5$, -1

2.- Haz el cuadrado a los mismos términos del ejercicio anterior.

3.- Realiza estas multiplicaciones: $4 \cdot 5x$ „ $\frac{5}{2} \cdot 6y$ „ $5b^3 \cdot (-3)$ „ $-2 \cdot \frac{7}{6} \cdot 7g$ „ $8c \cdot 6ac$ „

$9m^6 \cdot \frac{m}{2}$ „ $3 \cdot (-8b^2) \cdot (-b)$ „ $t^2 \cdot 5t^2 \cdot (-8)$ „ $3x \cdot (5x^4 + 7mx - x^9)$ „ $(3a^4 - 5) \cdot (a + 8)$

4.- De la página 125 del libro, los nos 1bcef, 2, 4, 5 y 6adeh.

5.- Desarrolla los siguientes productos notables:

$(2x-9)^2$ „ $(7x^5y + 6a)^2$ „ $(\frac{-3x}{4} + 2x^5)^2$ „ $(\frac{2x}{7} + 5) \cdot (\frac{2x}{7} - 5)$ „ $(x+20)^2$ „ $(a^2 - \frac{1}{6})^2$ „ $(3x-a)^2$

$(\frac{r}{4} - x)^2$ „ $(\frac{t}{2} + 3t^2)^2$ „ $(\frac{6x^4}{5} - x^3) \cdot (\frac{6x^4}{5} + x^3)$ „ $(8ab^2 + 3c) \cdot (8ab^2 - 3c)$ „ $(3\sqrt{x} - 2) \cdot (3\sqrt{x} + 2)$

EJERCICIOS DEL TRABAJO: **(Seguro 20)**

1.- PÁGINA 127 del LIBRO → número 5.

2.- PÁGINA 127 del LIBRO → número 7.

3.- PÁGINA 127 del LIBRO → número 11.

4.- PÁGINA 128 del LIBRO → número 13.

5.- PÁGINA 128 del LIBRO → número 14dgh. Le metéis estos 3 apartados más:

k) $8xy^2 - 5x^2y + x^2y - xy^2$ m) $\frac{4xy}{3} - \frac{5xy}{2} + \frac{7}{4}xy - xy$ q) $-10x^4yz^2 : 5x^3yz$

6.- PÁGINA 128 del LIBRO → número 15cef.

7.- PÁGINA 128 del LIBRO → número 16bcdijlmn.

8.- PÁGINA 128 del LIBRO → número 19.

9.- PÁGINA 128 del LIBRO → número 21bcd. También hacéis este otro apartado:

k) $(-20x^5 + 19x^4 - 3x^3 - 10x^2 + 2x) : (5x^2 - x)$

10.- PÁGINA 128 del LIBRO → número 23. También hacéis este otro apartado:

e) $2xy \cdot (x + 3x - x^2)$

11.- PÁGINA 129 del LIBRO → número 24cdef.

12.- PÁGINA 129 del LIBRO → número 28.

13.- PÁGINA 129 del LIBRO → número 31fg. Le metemos estos 4 apartados más:

h) $49x^2 + 7x^3$ k) $a^2b - 6a^2b^2$ m) $27a^3b^3 + 9a^4b - 81a^4b^2 + 21a^3b^7$ q) $3xy - 9x^2y + 6xy^2$

14.- PÁGINA 129 del LIBRO → número 32de. Le metemos estos 4 apartados más:

f) $(2+3x)^2$ h) $(2ab + 3a)^2$ k) $(-\frac{5b^3}{4} + \frac{b}{2})^2$ m) $(9x^5 - \frac{1}{2})^2$

15.- PÁGINA 129 del LIBRO → número 34bcdef.

16.- PÁGINA 129 del LIBRO → número 35.

17.- PÁGINA 129 del LIBRO → número 36adef.

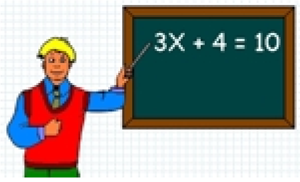
18.- PÁGINA 130 del LIBRO → número 41.

19.- Expresa estos polinomios como el cuadrado de una suma, de una diferencia o el producto de una suma por diferencia:

a) $4x^2 - 12x + 9$ b) $9x^4 + 6x^2y + y^2$ c) $1 - x^2$ d) $\frac{a^{16}}{9} - \frac{a^9}{3} + \frac{a^2}{4}$ e) $100k^{100} - x^{400}$

20.- Completa la siguiente tabla:

x (por)	**a**	**5b**	**– 3a**	**a – b**
4				
3a				
– 2b				
a + b				



Fdo. Juan Chanfreut Rodríguez
Profesor de matemáticas de 2º de ESO