

**EXPERIMENTOS ALEATORIOS Y DETERMINISTAS:**

Nuestro entorno está lleno de vida, y en todo momento estamos rodeados de lo que se llaman “fenómenos sociales colectivos”, que no son más que cualquier hecho o suceso que ocurra a nuestro alrededor.

No todas las acciones que realizamos a lo largo de nuestra vida tienen un resultado definido. Si lanzas una piedra al aire, sin duda volverá a caer. Asimismo, si accionamos el interruptor de una lámpara sabes que la bombilla, hasta entonces encendida, se apagará. El resultado de estas experiencias está totalmente determinado, por lo que reciben el nombre de **Experimentos Deterministas**. Su definición podría ser: \_\_\_\_\_

Sin embargo, al lanzar una moneda al aire no puedes saber de antemano si saldrá la cara del Rey o la cara donde pone 1 €. Lo mismo pasa al sacar una bola de los bombos del cupón de la ONCE. En estos casos no podemos conocer previamente el resultado de las experiencias, por lo que toman el nombre de **Experimentos Aleatorios**. Su definición podría ser: \_\_\_\_\_

**EL ESPACIO MUESTRAL:**

El primer paso que debemos realizar al estudiar un experimento aleatorio es definir el conjunto de sus posibles resultados. Por ejemplo, si consideramos el experimento de “lanzar una moneda” los resultados posibles son dos: *cara* y *cruz*. Cada uno de estos resultados se llama *suceso elemental (elemento)*, y el conjunto de todos ellos es el *espacio muestral*. Se pueden definir así:

*Suceso elemental* \_\_\_\_\_

*Espacio muestral* \_\_\_\_\_

El *espacio muestral* va precedido siempre por la letra griega “Ω”, un igual después y entre dos llaves se ponen, a continuación, todos los elementos del espacio muestral.

**SUCESOS:**

Considera el experimento de lanzar un dado con forma de cubo. Su espacio muestral estará formado por 6 elementos (6 sucesos elementales), que son desde el nº 1 al 6.

Ahora estamos interesados en estudiar situaciones más complejas, como *sacar un número par*, *sacar un número menor que 3*,... Estas situaciones se caracterizan por sus resultados:

<u>Situación</u>	<u>Resultados</u>
Sacar un número par	{2,4,6}
Sacar un número menor que 3	{1,2}
Sacar un número mayor que 1	{2,3,4,5,6}
Sacar un 3 o un 5	{3,5}

**Suceso** es cada una de las situaciones que se pueden estudiar de un experimento aleatorio, y se corresponden, normalmente, con una parte del espacio muestral. Se representan con letra mayúscula siempre.

**TIPOS DE SUCESOS:**

Vamos a partir del experimento *lanzar un dado cúbico*. Consideremos el suceso *sacar un número menor o igual que 6*. ¿En qué circunstancias ocurrirá este suceso? Sea cual sea el resultado del experimento, este suceso ocurrirá siempre con absoluta certeza. Por lo tanto, un **suceso seguro** es aquel que ocurrirá siempre que se realiza el experimento, y coincidirá con el espacio muestral.

Pensemos ahora en el suceso *sacar un número mayor que 6*. ¿Crees que ocurrirá alguna vez? Cualquiera que sea el resultado del experimento de lanzar el dado cúbico, es imposible obtener un número de esas características. Por ello, se habla de **suceso imposible** a aquel que no ocurre jamás hagamos el experimento cuantas veces quiera, y se representará por el símbolo:



Por último, existen, como hemos visto anteriormente, una serie de sucesos que en algunas ocasiones sucederán y en otras no (*sacar menos de 3*). A este tipo de sucesos se los denominan **sucesos probables**, que serían aquellos que pueden ocurrir o no a la hora de realizarlos, y corresponderían con una parte del espacio muestral.

## EJERCICIOS

**1.- Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios** y cuáles no: *hacer girar una ruleta y observar el número obtenido – Efectuar una reacción química y determinar los productos que se obtienen – Extraer una bola de una bolsa opaca que contiene bolas rojas, azules y rosas, y mirar su color.*

**2.- Un jugador tramposo fabrica una moneda trucada** que al lanzarla cae siempre de cara. ¿Es éste un experimento aleatorio?

**3.- Enuncia 4 experimentos aleatorios** y 4 que no lo sean, diferentes a los que ya se han visto.

**4.- Escribe el espacio muestral del experimento lanzar un dado con forma de dodecaedro.** Recuerda que un dodecaedro tiene 12 caras. Indica después algún elemento.

**5.- Determina el espacio muestral del experimento sacar una bola de una bolsa opaca que contiene una bola blanca, una verde, otra roja y otra rosa.** Indica, por otro lado, un suceso elemental.

**6.- Considera el experimento extraer una carta de una baraja española.** Determina su espacio muestral.

**7.- En el bombo de un sorteo de lotería hay 10 bolas numeradas del 0 al 9.** Extraemos sucesivamente cinco bolas para formar el nº correspondiente al primer premio. Tras cada extracción volvemos a introducir la bola en el bombo. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

**8.- Considera el experimento lanzar dos veces una moneda.** Determina el espacio muestral, así como los elementos que forman los siguientes sucesos:

A = Sacar al menos una cara      B = No sacar dos cruces

**9.- Realizamos el experimento extraer una carta de la baraja española.** Describe los resultados que forman el suceso *sacar una figura*.

**10.- En el experimento lanzar una moneda,** describe un suceso imposible y uno seguro.

**11.- En el experimento extraer una bola de una urna donde hay una bola blanca, otra negra, y otra rosa,** expresa los resultados que forman estos sucesos:

A = Sacar una bola blanca      B = Sacar una bola negra o una bola rosa      C = sacar una bola azul.  
¿Qué nombre recibe el suceso C?

## CONCEPTO DE PROBABILIDAD:

Una chica llamada Josefina se preguntaba un día en qué medida podía confiar en que a su padre le tocara la lotería. Cuando utilizamos la palabra *probable* estamos expresando la posibilidad de que ocurra una situación de la que no estamos seguros. En este caso es necesario medir el grado de certeza de dicha situación. Esta medida es la **Probabilidad**.

Coloquialmente decimos que es *muy probable* que suceda X para expresar que estamos casi seguros de que ocurrirá el suceso X. En cambio, decimos que es *muy improbable* que suceda Y si creemos firmemente que el suceso Y no ocurrirá.

En matemáticas, la probabilidad de un suceso A se mide asignándole un número entre 0 y 1, al que llamamos P(A). Si  $P(A) = 0$  significa que el suceso A *no ocurrirá nunca* al realizar el experimento aleatorio, mientras que  $P(A) = 1$  significa que A *ocurrirá con absoluta seguridad*.

Los valores intermedios de P(A) se corresponderán con diversos grados de certeza: *muy probable, probable, tan probable como improbable, improbable,...*

Por todo ello, definiremos la **Probabilidad** como \_\_\_\_\_

## CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD:

No es nada complicado averiguar la probabilidad de un determinado suceso. Sólo habrá que estar muy atentos al espacio muestral y a los casos favorables de un determinado suceso, que en ocasiones es una tarea un tanto laboriosa por la cantidad de sucesos elementales que nos aparecen.

Se suele utilizar la **Regla de Laplace** para averiguar la probabilidad de un suceso A. Esta regla se aplica únicamente cuando los distintos elementos que conforman el espacio muestral tienen la misma posibilidad de salir (situación de equiprobabilidad), y se efectuará mediante una fracción:

- En el numerador se pone el número de resultados favorables al suceso A
- En el denominador se pone el número total de resultados posibles, es decir, la cantidad de sucesos elementales (elementos) que tiene el experimento.

### PRUEBAS REPETIDAS:

Los experimentos que hemos visto anteriormente sólo los hemos efectuado una única vez. En este apartado lo que se pretende es realizar un mismo experimento unas pocas de veces, las veces que el ejercicio me indique, y por eso se llama *pruebas repetidas*.

Consideremos la experiencia de *lanzar una moneda 3 veces seguidas*. Sea A el suceso de *salir dos caras y una cruz*. ¿Cuál es la probabilidad de que nos salga? En estos casos, lo más importante es establecer correctamente cuál es el espacio muestral (se debe guardar un orden) para contar después los casos favorables al suceso que nos interesa. Quedaría así:

$\Omega = \{\text{ccc}, \text{ccx}, \text{cxc}, \text{xcc}, \text{cxx}, \text{xcx}, \text{xxc}, \text{xxx}\}$  c = cara x = cruz. Las tres letras juntas indican lo que sale en la 1ª, 2ª y 3ª tirada, respectivamente.

Los casos favorables al suceso que se estudia están resaltados en negrita. Los elementos que forman dicho experimento, tal y como se ve, son 8. Por lo tanto, la probabilidad de que se produzca el suceso A sería:

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

### EJERCICIOS

**1.- Lanzamos un dado y miramos lo que nos sale.** Halla la probabilidad de:

A = Sacar un 1    B = Sacar más de 4    C = Sacar un número par    D = sacar menos de 1

**2.- En un dado de quinielas hay 3 caras que tienen el nº 1,** dos con la X y una sola para el 2. ¿Son equiprobables los sucesos 1, X y 2 al lanzar un dado de quinielas? ¿Por qué?

**3.- Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos** en el experimento *lanzar dos dados de diferente color*.

A = Salir dos nº primos    B = Salir dos 6    C = Salir dos nº mayores que 1

**4.- En la experiencia lanzar 3 monedas,** calcula la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

A = Salir 2 cruces y 1 cara    B = Salir 3 caras    C = Salir como mínimo 1 cruz

**5.- Lanzamos 4 monedas.** ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral? Calcula la probabilidad de cada uno de estos sucesos:

A = Salir 2 caras y 2 cruces    B = Salir como máximo 3 caras    C = No salir ninguna cruz

**6.- Lanzamos una moneda y un dado simultáneamente.** Calcula estas probabilidades:

A = Salir cruz y 6    B = Salir cara y nº par    C = Salir cara o cruz y un 3    D = salir cruz y un nº menor o igual que 6    E = Salir cara o cruz y un nº menor que 0

**7.- Extraemos una carta de una baraja española,** la reponemos en el montón y extraemos otra. Calcula la probabilidad de los sucesos:

A = Sacar 2 bastos    B = Sacar un oro y una copa    C = No sacar espadas    D = Sacar espadas

**8.- El juego del dominó contiene una serie de fichas divididas** por la mitad, y en cada mitad hay una serie de puntos desde el 1 hasta el 6, o no hay puntos (en blanco). Se quiere saber cuántas fichas tiene el juego y la probabilidad de que cuando cojamos una ficha ésta sea:

A = Una que tenga 6 puntos en cada mitad (el 6 doble)

B = Una que al sumarle los puntos de cada parte se obtenga 8

C = Alguna ficha con puntuación menor que 3 en cada una de las partes

- 1.- En un saco blanco tienes 2.000 alubias blancas,** y en otro saco rojo tienes 3.000 alubias rojas. Del saco blanco pasas al rojo 50 alubias. Las mezclas muy bien y sacas entonces 50 alubias del saco rojo y - sin mirarlas - las metes en el saco blanco. Al final, ¿hay más alubias blancas en el saco rojo o alubias rojas en el saco blanco?
- 2.- Estamos en el Polo Norte, metidos dentro de nuestro Iglú** porque hace muchísimo frío. Como estamos un poco aburridos (allí no hay televisión, ni ...) nos disponemos a mirar por la ventana. Se desea saber qué es más probable, si que pase por ella un oso pardo, un oso hormiguero, un oso polar, un oso amoroso, o un oso panda.
- 3.- Dentro de una caja de cartón hay 4 cajas cúbicas ocupando** todo el espacio interior, y enumeradas del 1 al 4. Se tienen 2 bolas de pádel, una amarilla y otra naranja. El juego consiste en tirar las 2 bolas en el interior de la caja grande y conseguir la mayor puntuación posible. Se desea saber: los resultados posibles, 1 suceso elemental, el espacio muestral, la posibilidad de obtener 4 puntos y la probabilidad de que no caigan las 2 bolas en la caja 3.
- 4.- Tenemos a 3 personas que deciden ir al cine un día a las 10 de la noche.** Sin conocerse, se dirigen a un mismo multicines que tiene 3 salas, en las que están echando 3 películas que a los 3 gustan. ¿Qué probabilidad hay de que estas 3 personas coincidan en la sala 3?
- 5.- Tenemos un círculo al que se le ha dibujado un diámetro vertical.** Se han de pintar 5 puntos en el interior del círculo, de la manera que se quiera y donde se quiera, pero sin poderlo hacer sobre el diámetro. ¿Qué probabilidad hay de que alguien dibuje los 5 puntos en el semicírculo de la derecha?
- 6.- En una bolsa negra de terciopelo hay medidas 20 bolas rojas,** 25 bolas verdes, 30 bolas blancas y 45 bolas rosas, todas ellas del mismo tamaño y textura. ¿Cuál será la probabilidad de meter la mano y, al sacar una, que no sea de color rojo? Por otro lado, ¿cuántas bolas tendré que sacar, como mínimo, y sin mirar, para asegurar que tengo 2 bolas repetidas de color?
- 7.- ¿De cuántas formas diferentes se pueden guardar 60 € en billetes** dentro de un calcetín de la mesita de noche de mi dormitorio? ¿Cuál será la probabilidad de hacerlo en un número de billetes menor o igual a 4?
- 8.- Todos sabemos que en el juego del parchís al obtener un 5 “saco ficha”,** y que luego se avanza el nº de casillas que saquemos en la próxima tirada del dado. ¿Qué probabilidad hay de que, tras las dos primeras tiradas, tenga mi primera ficha colocada en el nº 4?

#### TRABAJO DEL TEMA DE LA PROBABILIDAD:

Los ejercicios son los que a continuación te propongo. Ten en cuenta que el nº 15 tiene un nº diferente porque es el que voy a corregir seguro.

#### **1.- Efectúa las siguientes operaciones variadas:**

a)  $\left(\frac{1}{2} + 5\right) : \left(\frac{4}{5} - \frac{5}{2}\right) + 3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 1 : \frac{6}{5}$

b)  $x - \frac{4x+3}{4} = -3 + \frac{2-x}{2} - 5$

c) Pasa a notación científica  $-0,000435$  ,,  $12 \cdot 10^6$  ,,  $-700 \cdot 10^{-6}$

d) Fracción generatriz a  $2,359$  y  $-0,08\overline{31}$

**2.- Dos trabajadores tardan en cavar una zanja 10 horas.** ¿Cuánto tiempo tardarán tres trabajadores en cavar una zanja idéntica?

**3.- Irene tiene 29 años más que su hija, y dentro de 7 años** se sabe que la suma de las edades de ambas será de 51 años. ¿Qué edad tiene cada una?

**4.- Encuentra la función lineal que pasa por el punto (-3, 4)** y represéntala en los mismos ejes que la función afín que pasa por los puntos (-3, 3) y (0, 2). Después, escribe algo sobre cómo salen las rectas y explica el por qué.

5.- Indica si los siguientes experimentos son aleatorios o deterministas:

- Repartir una mano de póquer y mirar las cartas que nos han tocado.
- Lanzar un naípe a la mesa y observar si cae sobre el dorso o sobre la figura.
- Calentar agua hasta que entre en ebullición y mirar la temperatura que marca el termómetro.
- Repartir 120 caramelos entre 12 amigos y ver cuántos les toca a cada uno.

6.- Determina el espacio muestral de extraer una bola de una bolsa opaca que contiene 5 bolas enumeradas del 1 al 5.

7.- Realizamos el experimento de lanzar una moneda de 1€ y otra de 2€ simultáneamente. Indica los resultados posibles del experimento y su espacio muestral.

8.- De una urna opaca que contiene una bola blanca, una roja, una verde y otra azul, extraemos una de ellas, miramos su color y la reintegramos a la urna. Repetimos la operación y miramos el color de la nueva bola. Halla los resultados posibles y el espacio muestral.

9.- Realizamos el experimento de hacer girar una ruleta de 36 casillas más la del 0. Escribe los elementos favorables para cada suceso:

A= Salir 0.                      B= Salir menos de 10                      C= Salir más de 5.  
D= Salir par                      E= Salir 2, 5 ó 21                      F= Salir menos de 37

¿Qué tipo de suceso es F? ¿Por qué?

Indica un suceso que sea imposible, y llámalo G.

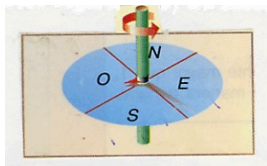
10.- Sacamos una carta de la baraja española. Indica los elementos que componen los siguientes sucesos:

A= Obtener oros                      B= No obtener una figura                      C= Obtener una sota

11.- Llamaremos  $n^{\text{os}}$  **dabuten** a aquellos  $n^{\text{os}}$  naturales tales que la suma de sus cifras coincida con nuestra edad. Por ejemplo, si una persona tiene 14 años, los  $n^{\text{os}}$  167, 1094 y 12341111 son de esa clase.

- ¿Cuántos  $n^{\text{os}}$  **dabuten** de 2 cifras tendrá Alejandro, que acaba de cumplir 14 años?
- Si elijo un  $n^{\text{o}}$  de 2 cifras al azar (entre 10 y 99), ¿qué edad tiene más posibilidades de que ése sea uno de sus  $n^{\text{os}}$  **dabuten**?

12.- Considera el experimento de hacer girar la aguja de la fortuna de la figura de más abajo. Describe:



- Un suceso seguro
- Un suceso imposible.

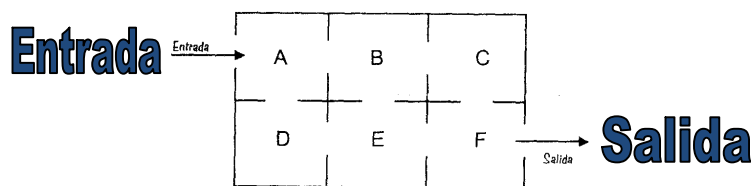
13.- Hacemos girar una aguja de la fortuna como la del ejercicio anterior. ¿Se pueden considerar los resultados posibles como equiprobables? Explica por qué.

Además, calcula las siguientes probabilidades:

A= Salir N                      B= Salir N o S                      C= No salir E.

14.- ¿Cuántos caminos diferentes hay en el siguiente plano, desde la entrada hasta la salida, sin pasar dos veces por el mismo sitio?

¿Cuál es la probabilidad de encontrar la salida sin pasar por la habitación E?



15.- Lanzamos dos dados y, con los números que salen formamos una fracción menor o igual que uno. Juan dice que, en la próxima tirada, la fracción resultante será irreducible y Pepe que será reducible. ¿Quién de los dos crees que tiene más posibilidades de acertar?

**16.- 5 atletas (Ángel, Brito, Carlos, David y Enrique)** participan en la final de los 100 m lisos de una carrera de una ciudad importante. Se van a hacer entrega de 3 medallas, una de oro para el ganador, otra de plata para el segundo, y otra de bronce para el tercero. Si no se tiene en cuenta cómo llegan a la meta los otros dos corredores, ¿Cuántos resultados posibles distintos tiene la carrera? **6-T<sub>14</sub>-2ºESO**

**17.- Lanzamos un dado dos veces consecutivas.** Calcula las siguientes probabilidades:

A= Sacar dos 1    B= Obtener de suma 11    C= No sacar un 2    D= Sacar al menos un 2

**18.- Queremos hacer el experimento de sacar dos bolas de una urna,** de forma alternativa, donde hay 1 bola negra, 1 bola blanca y otra rosa. Tras cada extracción se devuelve la bola a la urna. Obtén el espacio muestral y calcula la probabilidad de:

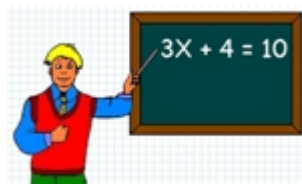
A= Obtener dos bolas del mismo color    B= Que la primera bola extraída sea rosa.

C= Que la segunda bola sea blanca    D= Obtener dos bolas de diferente color.

**19.- Lanzamos un dado 3 veces consecutivas.** Obtén el espacio muestral y calcula las siguientes probabilidades:

A= Salir triple 6    B= Salir dos 6    C= Salir un 6    D= No salir ningún 6.

**20.- Juan, un profesor de matemáticas muy bueno** de la provincia de Málaga, quiere hacer una ruleta giratoria de forma que si sale “rosa” salga a explicar un ejercicio una niña, y si sale “celestes” salga a explicarlo un niño. ¿Cómo tendrá que hacer la ruleta para que la probabilidad de que salga una niña o un niño sea la misma, sabiendo que en la clase tiene 20 niñas y 10 niños?



Fdo. Juan Chanfreut Rodríguez  
Profesor de matemáticas de 2º de ESO