NÚMEROS ENTEROS (Z): Existen n^{os} con signo, que son los n^{os} enteros (Z+ son los positivos y Z- son los negativos). Según se sabe, nos los podemos encontrar en:
a.- Los ascensores, donde el "0" indica la planta baja. b.- La libreta del profesor, donde el "0" indica que aún no ha empezado a poner deberes. c.- El golf, donde el "0" es que lleva dados los mismos golpes que se le exigen. d.- La altitud y profundidad, done el "0" es el nivel del mar.
e.- Las temperaturas, donde el "0" es la temperatura de congelación del agua. f.- La recta numérica, donde el "0" es el nº que separa los positivos (a la derecha) de los negativos (a la izquierda).
g.- Los años de nacimiento, donde el "0" es el año en que nació Jesucristo. h.- El banco, donde el "0" es que ni tengo ni debo nada...
IMPORTANTE: Los n^{os} enteros tienen siempre dos elementos que lo forman como son "el signo" y la "cifra". A la cifra se la conoce con el nombre de "**valor absoluto**".

ORDEN DE N^{os} ENTEROS: Se siguen estas reglas:
a) Entre **2 n^{os} enteros positivos** siempre es mayor quien tenga mayor valor absoluto, y viceversa.
b) Un **nº positivo** siempre es mayor que el "**0**", y viceversa.
c) El "**0**" siempre es mayor que cualquier **nº negativo**, y viceversa.
d) Cualquier **nº positivo** siempre es mayor que cualquier **nº negativo**, y viceversa.
e) Entre **2 n^{os} enteros negativos** siempre es mayor el que tenga menor valor absoluto, y viceversa.

OPERACIONES CON N^{os} ENTEROS: **MUY MUY IMPORTANTE**

SUMA: Se hace de 2 formas diferentes. Antes de contestar debo lanzar una pregunta, ¿de qué signo?
a.- De igual signo: Se deja el **mismo signo** y se **suman** los valores absolutos.
b.- De diferente signo: Se deja el **signo del que tenga mayor valor absoluto** y se **restan** los v.a. Ejemplos:

$$(+5) + (+9) = (+14) \;,,\; (-2) + (-8) = (-10) \;,,\; (+3) + (-1) = (+2) \;,,\; (-9) + (+4) + (-7) = (-12)$$

RESTA: Puesto que restar es lo mismo que sumar el opuesto del nº, para hacer las restas primero habrá que **pasar las restas a sumas**, y **después procederemos como en la suma**. Ejemplos:

$$(-9) - (-5) = (-9) + (+5) = (-4) \;,,\; (+8) - (+2) + (-3) = (+8) + (-2) + (-3) = (+3)$$

MULTIPLICACIÓN: Se aplica la **regla de los signos** y se **multiplican los valores absolutos**. Ejemplos:

$$(-9) \times (-5) = (+45) \;,,\; (+8) \times (-4) = (-32) \;,,\; (+11) \times (+6) = (+66) \;,,\; (-3) \times (+15) = (-45)$$

DIVISIÓN: Se aplica la **regla de los signos** y se **dividen los valores absolutos**. Ejemplos:

$$(-12) : (+6) = (-2) \;,,\; (+99) : (+11) = (+9) \;,,\; (+340) : (-10) = (-34) \;,,\; (-48) : (-6) = (+8)$$

PASO A FORMA SIMPLIFICADA: Un ejercicio que nos encontramos a los n^{os} enteros metidos en sus respectivos paréntesis se puede pasar a forma simplificada (un solo signo delante de cada valor absoluto) aplicando la regla de los signos. Posteriormente, si el nº lleva delante un signo "–" será negativo y si lleva "+" o no lleva nada será positivo. Con ellos, la operación que siempre haremos será la de "sumar". Ejemplos:

$$(-9) + (-8) = -9 - 8 = -17 \;,,\; (+5) - (-3) + (+7) = 5 + 3 + 7 = 15$$

$$(+3) + (-2) - (+12) = 3 - 2 - 12 = -11 \;,,\; (-4) + (-5) + (+3) - (+55) = -4 - 5 + 3 - 55 = -61$$

EJERCICIOS

1.- De la página 31 del libro, los ejercicios 2 y 3. También, de la página 33, los ejercicios 4, 5ef, 6cd, 10ef y 11cef. Para terminar, de la página 35, los ejercicios 13d, 17cd, 18c, 20df, 21ce, 22c y 24cd.

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA:

Este tipo de ejercicios se hacen todos igual. Es una de las propiedades que tiene la multiplicación de nos enteros. Nos lo encontraremos cuando tengamos un nº entero multiplicando a un corchete, donde dentro del corchete hay nos sumando o restando.

El hecho de que haya un nº entero multiplicando al corchete significa que está multiplicando a todos los nos del corchete obviamente:

1ª Forma $(-6) \times [(-4) + (-7) - (+3)] = (-6) \times (-4) + (-6) \times (-7) - (-6) \times (+3)$ **2ª Forma**

Esto se llama "aplicar la propiedad distributiva" y en los ejercicios aparecerá cuando te diga "calcula de dos formas diferentes o distintas"

SACAR FACTOR COMÚN: Es lo contrario de aplicar la propiedad distributiva. En el ejemplo de la parte de arriba, sería ir de la parte derecha del igual a la parte izquierda. Ejemplo:

$$(-9) \times (-4) - (-9) \times (+7) + (-3) \times (-9) = (-9) \times [(-4) - (+7) + (-3)]$$

EJERCICIOS

2.- Calcula las siguientes expresiones de dos formas distintas:

a) $(-4) \cdot [(-3) + (+7) + (-2)]$ b) $(-10) \cdot [(+5) - (+3) + (-9)]$

3.- Saca factor común:

a) $(-3) \cdot (+5) + (-3) \cdot (+2) - (-3) \cdot (+8)$ b) $(-7) \cdot (+2) + (-3) \cdot (+2) - 6 \cdot (+2)$

c) $(-50) + (+40) - (-45)$

POTENCIACIÓN: Ya sabemos desde hace algún tiempo lo que es una potencia, y que dicha potencia consta de 2 nos. Ahora vamos a ver potencias cuyas bases y exponentes pueden ser nos enteros. No es nada complicado aunque os lo aparezca, ya que se hacen de la misma manera:

$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$ „ $(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16 = 16$

En ocasiones, el resultado nos va a salir negativo, y, en otras ocasiones, nos saldrá positivo. ¿**Cuándo el resultado de una potencia va a salir negativo**? Tal y como se aprecia en el ejemplo anterior, será **cuando la base sea negativa y el exponente impar**.

También aquí sigue valiendo aquello que decía que "**una potencia elevada a exponente "1" es igual a la base**" y "**una potencia elevada a exponente "0" es igual al nº 1**", aunque las bases sean negativas: $(+2)^1 = +2$ „ $(-7)^1 = -7$ „ $(-34)^1 = -34$ „ $(-11)^0 = 1$ „ $(-23.458)^0 = 1$ „ $(+5)^0 = 1$

OPERACIONES CON POTENCIAS: Siguen siendo las de otros años.

- Suma y resta de potencias: Para hacerlas, se calculan las potencias y se suman o se restan los resultados (dependiendo de la operación que las separa). Como ejemplos valdrían

$$(-7)^2 + (-7)^3 + (-7) = 49 + (-343) - 7 = -301 \quad „ \quad (-5)^3 - (-3)^0 - (-1)^{12} = -125 - 1 - 1 = -127$$

- Multiplicación con la misma base: Se deja la misma base y se suman los exponentes.

$$(-7)^2 \cdot (-7)^3 \cdot (-7) \cdot (-7)^0 = (-7)^6 \quad „ \quad (+6)^5 \cdot (+6)^4 \cdot (+6)^{-7} = (+6)^2 \quad „ \quad (-5)^3 \cdot (-5)^{-8} = (-5)^{-5}$$

- División con la misma base: Se deja la misma base y se restan los exponentes.

$$(-5)^3 : (-5)^{-8} = (-5)^{11} \quad „ \quad (+10)^{-5} : (+10)^{-3} = (+10)^{-2} \quad „ \quad (-3)^6 : (-3)^9 = (-3)^{-3}$$

- Potencia de potencia: Se aprecia cuando se tiene una base elevada a dos exponentes a la vez, y separados por unos paréntesis. Para hacerlo se deja la misma base y se multiplican los exponentes.

$$((-3)^4)^5 = (-3)^{20} \quad „ \quad (-15)^7 \cdot ((-15)^3)^{-9} = (-15)^7 \cdot (-15)^{-27} = (-15)^{-20}$$

- Potencia de un producto o un cociente:

A cada uno de los números que aparecen dentro del paréntesis se les pone el exponente al que está elevado.

$$(-3 \cdot 6 \cdot 11^3)^4 = (-3)^4 \cdot 6^4 \cdot (11^3)^4 = (-3)^4 \cdot 6^4 \cdot 11^{12} \quad „ \quad (-99 : 5^2)^8 = (-99)^8 : (5^2)^8 = (-99)^8 : 5^{16}$$

Obviamente, esta propiedad se puede aplicar también al revés:

$$3^4 \cdot 7^4 = (3 \cdot 7)^4 = 21^4 \quad „ \quad (-8)^6 : 4^6 = (-8 : 4)^6 = (-2)^6 = 64$$

TRUCOS CON OPERACIONES CON POTENCIAS:

En algunas ocasiones, cuando hacemos ejercicios con potencias, éstas no tienen la misma base. ¿No se pueden resolver? Pudiéramos pensarlo, pero generalmente se puede hacer algo más. Y ese algo más que se puede hacer viene dado porque la potencia que tiene la base con cifra mayor suele cambiarse por una potencia cuya base es la misma que la de la potencia con la base menor. Sólo haría falta saber cuántas veces se ha multiplicado esa base para conseguir la otra mayor. Valgan estos ejemplos

$$(-2)^4 \cdot 64 = (-2)^4 \cdot (-2)^6 = (-2)^{10} \qquad 64 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$$

$$(-5)^{58} : (-125)^4 = (-5)^{58} : ((-5)^3)^4 = (-5)^{58} : (-5)^{12} = (-5)^{46} \qquad -125 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5)$$

CAMBIO DEL SIGNO A LA BASE: Algunas veces me encuentro con dos potencias que tienen la misma base pero de signos diferentes, es decir, una con (– 4) y otra con (+4). ¿No se podrá hacer? Veamos el ejemplo y la propiedad que vamos a sacar de él.

$(+4)^2 = +16$ „ $(-4)^2 = +16$ Esto significa entonces que $(+4)^2 = (-4)^2$ porque el resultado es el mismo.
$(+4)^3 = +64$ „ $(-4)^3 = -64$ Esto significa entonces que $(+4)^3$ no es igual a $(-4)^3$ porque ...

¿Qué queremos decir con esto? Pues que **a una potencia con exponente par se le puede cambiar el signo a la base** y no ocurriría nada, ya que lo estamos cambiando por lo mismo. ¿Para qué nos puede servir esta propiedad? Mira el ejemplo y saca tus conclusiones:

$$(-7)^3 \cdot (+7)^8 = (-7)^3 \cdot (-7)^8 = (-7)^{11}$$

POTENCIAS CON EXPONENTE NEGATIVO: Antes hemos visto que las potencias pueden tener un exponente negativo. ¿A qué será igual? Mira lo que te explico ahora

$(-3)^{-5} = (-3)^0 : (-3)^5 = 1 : (-3)^5 = \frac{1}{(-3)^5}$, o sea, que $(-3)^{-5} = \frac{1}{(-3)^5}$. Y si tenemos $\mathbf{a^{-n}} = \frac{1}{a^n}$

A partir de ahora, cada vez que tengamos un resultado con exponente negativo deberemos pasar el exponente de esa potencia a positivo **OBLIGATORIAMENTE**.

EJERCICIOS

4.- De la página 36 del libro, los nºˢ 3 y 6abcd. También, de la página 38, los ejercicios 7ade, 8bc, 9ad, 10bd, 13bc, 15ac, 19, 20bc, 21bde y 22cdf.

5.- Calcula: $(-9)^2$, $(-10)^4$, $(+5)^3$, $(-1)^7$, $(-11)^2$, 0^7, $(-2)^6$, $(-3)^5$, $(+6)^3$, $(+125)^1$, $(-42)^0$, $(-4)^3$

6.- Realiza estas operaciones con potencias:

$(-2)^7 \cdot (-2) \cdot (-2)^{-3}$	$(-5)^4 \cdot (-5)^{-7} \cdot (-5)$	$(-6)^{10} \cdot (-6)^{-2} \cdot (-6)^{-5}$
$(-3)^{-3} \cdot (-3) \cdot (-3)^{-5}$	$(-7)^{-10} : ((-7)^2)^{-3}$	$(-7)^{10} : (-7)$
$(-7)^{11} : (-7)^{-13}$	$(-10)^8 : (-10)^{15}$	$(-6)^{10} : (+6)^7$
$(-3)^7 \cdot (-3)^{-9} \cdot (-3)$	$(-2)^8 \cdot (-2) \cdot (-32)^{-6}$	$(-4)^5 \cdot (+4)^6 \cdot (-4)^2$
$(-7)^{10} \cdot 49$	$(+5)^{12} \cdot 625^{-2}$	$(-3)^7 : (-27)^5$
$(-1)^{-6} : (-1)^{-75}$	$(-100.000)^{-8} : (-10)^4$	$(-3)^7 \cdot (-3)^5 \cdot (+3)^8$
$(-3)^2 \cdot (+3)^{10} \cdot (-3)^{-4}$	$(-3)^4 : (+3)^{-16}$	$(-2)^8 : (-2)^{17}$
$(-11)^7 \cdot (-11)^{-9} \cdot (-11)^{-10}$	$(-11)^2 \cdot (-11)^6 : (-11)^{10}$	$((-3)^2)^{-7} \cdot (-3)^4$
$(-5)^{12} : (-125)^4$	$((-3)^6)^{-4} : ((-3)^{-2})^{-8}$	$(-5)^2 + (-5)^3 - (-10)^0$
$(-8)^2 - (-3)^4 + (-2)^2$	$-13 - (-9)^2 - 6^2$	$3 \cdot (-3)^4 \cdot 3 \cdot 3^0 \cdot (-3)^{-15}$

¡CUIDADO! $(-4)^2 = (-4)\cdot(-4) = +16$, pero $-4^2 = -4 \cdot 4 = -16$. El truco está en el paréntesis inicial. En la primera potencia, lo que está al cuadrado es "– 4", y en la segunda sólo el "4".

POTENCIAS DE BASE 10: Cuando tengamos un nº multiplicando a una potencia de base 10, habrá que mirar el exponente de la potencia. Si es positivo, le traslada la coma al nº hacia la derecha tantas veces como indique el valor absoluto del exponente. Si es negativo, le traslada la coma hacia la izquierda el mismo nº de veces ...

$$32 \cdot 10^4 = 320.000 \text{ „ } 2'457 \cdot 10^5 = 245.700 \text{ „ } 300 \cdot 10^{-7} = 0'00003 \text{ „ } -56'32 \cdot 10^{-3} = -0'05632$$

LA NOTACIÓN CIENTÍFICA:

No sé por qué, pero este tipo de ejercicios se vuelve un tanto dificultoso como no se le coja el tranquillo rápido. Estos ejercicios valen para poder abreviar nºs de muchas cifras en tan solo unas pocas. Para ello, lo que se hace es cambiar al nº que nos dan por 2 factores, cumpliendo estas condiciones:

1er factor → Debe ser un nº con una sola cifra en la parte entera distinta de 0.

2º factor → Debe ser una potencia de base 10 y exponente el que corresponda (un nº entero), para que nos dé el resultado.

$23.000 = 2'3 \cdot 10^4$ „ $1.004.000 = 1'004 \cdot 10^6$ „ $-0'078 = -7'8 \cdot 10^{-2}$ „ 102 billones = $1'02 \cdot 10^{14}$

$340 \cdot 10^{-9} = 3'4 \cdot 10^2 \cdot 10^{-9} = 3'4 \cdot 10^{-7}$ „ $-0'00006 \cdot 10^{-9} = -6 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-9} = -6 \cdot 10^{-14}$

EJERCICIOS

7.- Escribe con todas las cifras estos nºs:

$3 \cdot 10^6$ „ $7 \cdot 10^{-5}$ „ $52 \cdot 10^3$ „ $23 \cdot 10^{-4}$ „ $3'24 \cdot 10^{12}$ „ $5'3 \cdot 10^{-12}$ „ 10^{-6} „ $1'6 \cdot 10^9$ „ $-8 \cdot 10^7$

8.- Escribe en notación científica:

3.245.000 „ 0´000000032 „ 432´56 „ $290 \cdot 10^7$ „ veintitrés mil millones „ 75.100.000 „ – 4.500

0´0000018 „ – 0´00000031 „ $4.265 \cdot 10^4$ „ $-689'75 \cdot 10^{-10}$

RAÍCES CUADRADAS: Vamos a decir bien poco de este apartado, y es debido a que le dedicaremos mucho más tiempo dentro de un par de temas. Si acaso, no conviene olvidar cómo se hace una raíz cuadrada, ni tampoco es bueno no saber que "**un nº negativo no tiene raíz cuadrada porque ningún nº (positivo o negativo) elevado al cuadrado sale negativo, sino que siempre va a salir positivo**" y eso es debido a que todos los cuadrados de cualquier nº son positivos.

9.- De la página 39 del libro, el nº 2abdegh. También, hacer la raíz cuadrada al nº 38,52685.

OPERACIONES COMBINADAS: Sigue siendo lo mismo de todos los años. El orden que se establece es "1º se realizan las operaciones que haya dentro de un paréntesis. Si no hay paréntesis, lo 2º será hacer las potencias y las raíces cuadradas. A continuación, lo 3º, las multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparezcan. Por último, las sumas y las restas".

EJERCICIO

10.- Efectúa: a) $8 - (12 - 6 - 2) - 5$ b) $(-5 - 9 - 6) : 5 + 4$ c) $3 \cdot (8 \cdot 4 + 12 : 3) - 5 \cdot 4$

d) $2 \cdot [-9 \cdot (-9 + 3 - 6) + 5]$ e) $-2 \cdot [4 - (-7) \cdot (6 - 9)] - 5 : (9 - 4)$ f) $54 - \sqrt{196} \cdot (-2^6 + 42)$

g) $38 + 142 : (3^2 - 7) - \sqrt{49} \cdot 3^2 + (50 + 204 : \sqrt{1^2 + 3})$ h) $[5 \cdot (-7) + 12 : 3] \cdot (15 \cdot 4 - 5)$

i) $-8 \cdot 4 - [(-7) \cdot (6 - 9)] - 5 \cdot (4 - 9)^2$ j) $12 - \sqrt{400} \cdot (-2^4 + 31) - 80 \cdot 4 + (-1)^{15}$

DIVISIBILIDAD. CRITERIOS. MCD. MCM: Vamos a comentar muy poco sobre estos conceptos pues ya son varios los años que han sido trabajados. Es importante no haberse olvidado de: - Cómo se sacan los divisores y múltiplos a un nº cualquiera, qué son números primos y compuestos, los criterios de divisibilidad del 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 15, …, descomponer los números en factores primos, saber explicar qué es el MCD y el MCM y hacerlos aplicando la frase correspondiente de cada uno de ellos (incluyendo problemas).

EJERCICIOS

11.- De la página 18 del libro, el nº 40. De la siguiente, los nºs 43 ce, 44 b y 45.

12.- Escribe el nº más grande de 5 cifras que sea divisible por 3, 4 y 11 a la vez, pero que no lo sea de 9. Explica cómo lo sabes. ¿Es ese nº múltiplo de 55?

13.- Tengo una colección de pegatinas. 600 son "surferas", 480 de animales y 360 de automóviles. Las voy a donar para una obra benéfica y para ello quiero meterlas en sobrecitos con la misma cantidad de pegatinas, sin mezclar y sin que me sobre ninguna. ¿Cuántas podré meter en cada sobrecito como máximo?

14.- En casa de Inés comen unas lentejas buenísimas cada 14 días. En la de Lucía cada 16 y en la de Ángela cada 20. ¿Qué tiempo tiene que pasar para que haya lentejas a la vez en las tres casas si justamente hoy han comido ese rico y nutritivo alimento?

15.- El MCD de 2 números es 24 y el MCM 1800. Si uno de los números es el 72, ¿cuál es el otro? Debes escribir en el cuaderno los razonamientos que te llevan a saber la solución.

EJERCICIOS DEL TRABAJO: **(Seguro 20)**

1.- Copia y completa esta tabla:

a	b	a – b	b – a	a + b	b + a

Fíjate en las 2 últimas columnas. ¿Qué observas? ¿Por qué?

2.- PÁGINA 40 del LIBRO → número 2.

3.- PÁGINA 40 del LIBRO → números 8d, 9d y 10e.

4.- PÁGINA 41 del LIBRO → números 17d, 18e y 19b.

5.- PÁGINA 41 del LIBRO → número 23.

6.- Expresa como una sola potencia:

a) $6^8 : (6^4 \cdot 6^{10})$ b) $(-2)^7 \cdot [(-2)^6]^{-3} \cdot 2^{10}$ c) $10000^5 : (-10)^{-2}$

d) $(-6)^{12} : (-216)^{10}$ e) $[(-14)^9]^2 : [(-14)^3]^6$ e) $[(-2)^8]^3 : (-2)^{44}$

7.- PÁGINA 41 del LIBRO → número 26.

8.- PÁGINA 43 del LIBRO → número 37.

9.- Escribe en notación científica:

$234.000.000$, $0'043$, $-32'4 \cdot 10^6$, $90.000 \cdot 10^{-10}$, doce billones , $-0'00092 \cdot 10^{-4}$

10.- Escribe las expresiones siguientes de modo que sólo aparezcan potencias de exponente negativo:

$$2^3 \ , \ (-4)^7 \ , \ \frac{1}{2^3} \ , \ (-7)^{99} \ , \ \frac{1}{a^n}$$

11.- Calcula, utilizando solo el resultado positivo de la raíz:

b) $12 - 18 : 2 + (-4) \cdot \sqrt{\mathbf{111 + 5 \cdot 2}}$ c) $(-5) \cdot 3^2 - \sqrt{\mathbf{50 - 1}} : [(-5) \cdot (-2) - 3^1]$

e) $\sqrt{\mathbf{144}} : [7 + (-5)]^2 + (-2)^3$ f) $19 - [4 \cdot (5 + 120 : 4) + \sqrt{\mathbf{620 + 5}} : (-25)] - 4^2$

12.- Halla el menor número que sumado a 265 da un cuadrado perfecto.

13.- Escribe todos los números de 3 cifras menores de 500 cuya raíz tenga de resto 10.

14.- PÁGINA 23 del LIBRO → número 19cd.

15.- PÁGINA 23 del LIBRO → número 22bf.

16.- PÁGINA 24 del LIBRO → número 29.

17.- PÁGINA 25 del LIBRO → número 38.

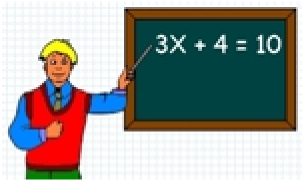
18.- PÁGINA 25 del LIBRO → número 41.

19.- Alejandro tiene unas 150 fotografías. Puede pegarlas en un álbum en grupos de 8, 9 o 12 fotografías y sin que le sobre ninguna. ¿Cuántas fotografías tiene Alejandro?

Explícate todo lo que puedas, por favor.

20.- Si "m" y "n" son números enteros positivos, ¿cuál es el menor valor de "m" para que … **6-T2--2ºESO**

$$\mathbf{2940 \cdot m = n^2}?$$



Fdo. Juan Chanfreut Rodríguez
Profesor de matemáticas de 2º de ESO